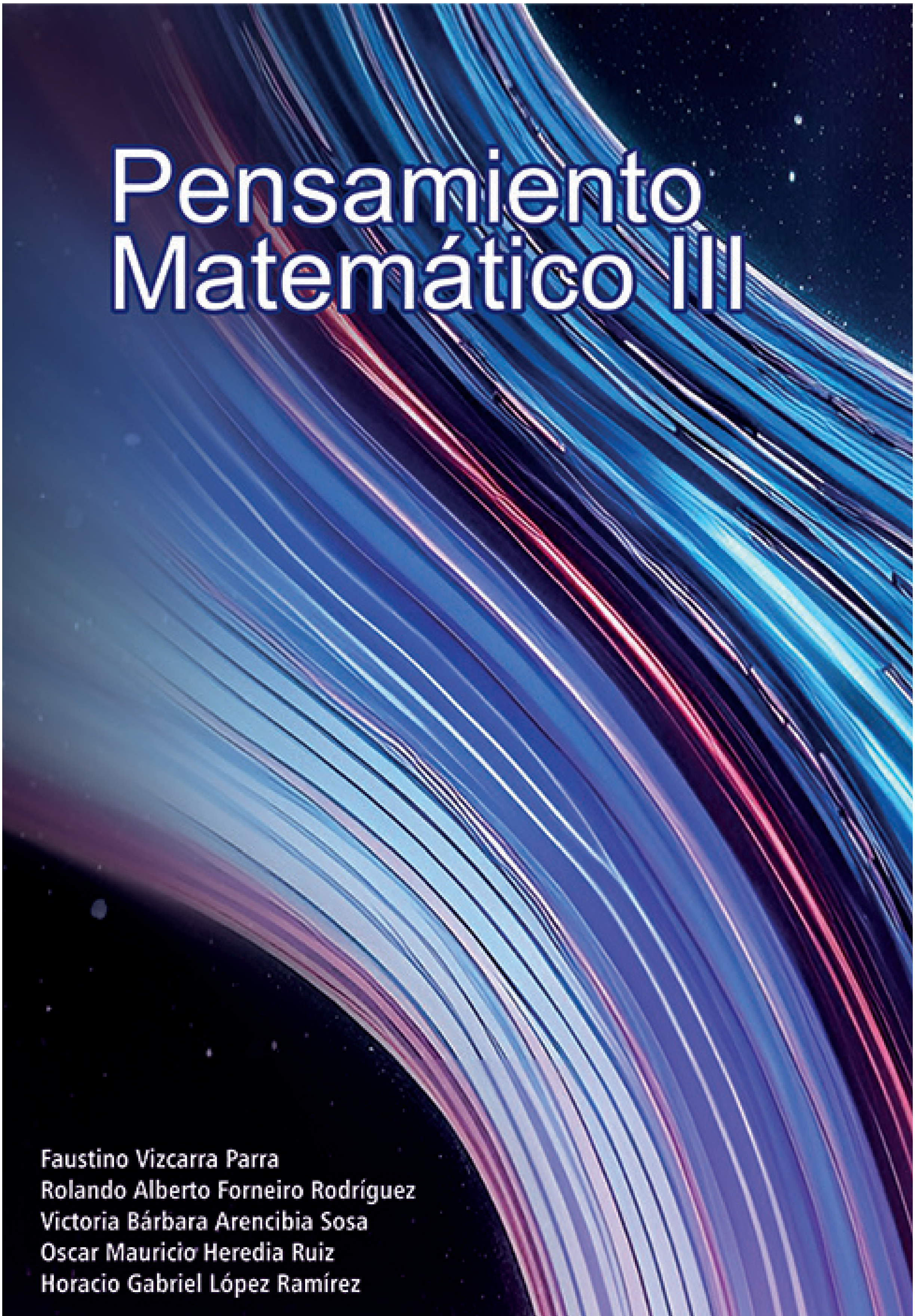


Pensamiento Matemático III

Faustino Vizcarra Parra
Rolando Alberto Forneiro Rodríguez
Victoria Bárbara Arencibia Sosa
Oscar Mauricio Heredia Ruiz
Horacio Gabriel López Ramírez

Pensamiento Matemático III

Faustino Vizcarra Parra
Rolando Alberto Forneiro Rodríguez
Victoria Bárbara Arencibia Sosa
Oscar Mauricio Heredia Ruiz
Horación Gabriel López Ramírez

Primera edición, julio de 2025

Universidad Autónoma de Sinaloa
Dirección General de Escuelas Preparatorias
Ciudad Universitaria, Circuito Interior Ote. S/N, C.P. 80013
Teléfono: 667 712 1653, Culiacán, Sinaloa, México

Diseño editorial: Servicios Editoriales Once Ríos, S.A. de C.V.
Diseño de portada: Irán Ubaldo Sepúlveda León

Número de Registro: 03-2025-032613372000-01
ISBN: 978-607-9432-72-0

Impreso en México
Printed in Mexico

Dedicatoria y agradecimientos

A nuestros queridos docentes

Con profundo agradecimiento y admiración dedicamos este libro a aquellas y aquellos profesores excepcionales que, con su pasión por la enseñanza y su compromiso inquebrantable, han guiado la creación de estas páginas. Su dedicación en el desarrollo del pensamiento variacional con un enfoque conceptual ha iluminado el camino a otros docentes del Nivel Medio Superior (NMS) de la Universidad Autónoma de Sinaloa (UAS).

Sus enseñanzas han sido como faros de sabiduría, iluminando mentes, inspirando la curiosidad y fomentando el gusto por el aprendizaje. En este sentido, este libro es un testimonio de ese arduo trabajo y devoción, y esperamos que sea bien recibido para formar las nuevas generaciones de estudiantes. Así, su uso en el proceso de enseñanza y aprendizaje nos invita a seguir aprendiendo y creciendo como un equipo de docentes, que ven en la innovación la importancia de incorporar la inteligencia artificial (IA) como un aliado.

Tomemos en cuenta que la integración de la inteligencia artificial en el proceso de enseñanza y aprendizaje emerge como un catalizador fundamental para el desarrollo del pensamiento variacional. Al aprovechar sus capacidades, la IA puede facilitar el acceso al conocimiento, personalizar el aprendizaje, optimizar los métodos pedagógicos y evaluar los resultados. Además, el estudiante la puede utilizar como un tutor en su proceso de aprendizaje. En definitiva, se reconoce el impacto de la IA como un aliado del docente en el proceso educativo.

En agradecimiento por sembrar las semillas para el desarrollo del pensamiento matemático en las y los estudiantes del NMS de la UAS, les extendemos nuestra más sincera gratitud. Que este libro sea un tributo a su legado en la formación de mentes brillantes y pensadores en el quehacer de las matemáticas.

Colaboradores:

Nombre	Unidad Académica
Policarpio Sicairos Avitia	Hermanos Flores Magón
Santiago Meza Olivas	
Felipe de Jesús Sicairos Avitia	
Anarelli Corona Cárdenas	Victoria del Pueblo
Fernando Tomás Gil Camacho	
Pavél Iván Barajas Ledón	San Blas
Jorge Armando Valdés Acosta	
Isabela Medina Valenzuela	
Aline Núñez Solís	
Miriam Georgina Valenzuela Vega	
César Alonso López Chan	
César Pilar Quintero Campos	La Cruz
Efraín Meza Valdez	
Joel Aguirre Favela	
Martín Luna Belmar	
Silvestre Trinidad Quintero Ibarra	

Paloma Sandoval Gámez	C.U. Mochis
José Humberto Romero Fitch	
Karla Ayala Cruz	
Rogelio Romero Fitch	
Heriberto Carlos Ayala Cruz	
Ramiro Amezcua Reyes	
Yuniva Patricia Servín Castillo	
Iván Emiliano Ayala Gamboa	
Manuel Bustamante Lau	
Ismael Acosta López	
Eva Edith Verdugo Serrano	Ruiz Cortines
Irma del Carmen Jacobo Melo	Emiliano Zapata
Poignet Ayala Zazueta	
Jonathan Sánchez Rodríguez	
Jorge Aldivar Contreras Espinoza	Casa Blanca
Lorena Leal Montoya	
Claudia Raquel López Herrera	
Diana Guadalupe Soto Bernal	
Pedro Alberto Alarcón Morales	Los Mochis
Naysin Yunibbe Bañuelos Millán	
Abril Liseth Fierro Romero	
Jesús Antonio García Duarte	
Yadira Esmeralda Gutiérrez Esquivel	
Adriana Gutiérrez García	
Edith Ivett Ocampo Manjarrez	
Paola Elifelet Reyes Álvarez	
Misael Romero Lozoya	
Juana María Armenta Trasviña	Guasave Diurna
Silvia Bojórquez Soto	
Arturo Trasviña López	
Reyna Jesús Trasviña López	
Adán Meza Sánchez	Comte. Víctor Manuel Tirado López
Izeth Sarai Rivera Díaz	Los Mochis, ext. Macapule
Zayto Baltazar Peñuelas Borboa	
Ramón Chávez Valenzuela	Central Diurna
Jesús Isela Morales Higuera	
Ismael Aranda Estrada	Rubén Jaramillo
Fernando Eleazar Acosta Cruz	DGEP
Luis Felipe Flores Tirado	Dr. Salvador Allende
Yoanna Marisol Mercado Lizarde	Vladimir I. Lenin
María Esther Franco González	
Jacob Pascual Zamora Sánchez	
Ricardo Estrada Sobampo	2 de Octubre
Juan Antonio León López	Augusto Cesar Sandino
Nereyda de Jesús Díaz Gustavo	8 de julio, ext. Dr. Gabino Barreda
Melesio de Jesús Niebla Sotelo	
Armando Arellano Rodríguez	

Tabla de categorías,
subcategorías, aprendizajes de trayectoria
y metas de aprendizaje
de Pensamiento Matemático III

Categorías			
C1 Procedural	**C2** Procesos de intuición y razonamiento	**C3** Solución de problemas y modelación	**C4** Interacción y lenguaje matemático
Subcategorías			
S1 Elementos aritmético-algebraicos	**S1** Capacidad para observar y conjeturar	**S1** Uso de modelos	**S1** Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico
S2 Elementos geométricos	**S2** Pensamiento intuitivo	**S2** Construcción de modelos	**S2** Negociación de significados
S3 Elementos variacionales	**S3** Pensamiento formal	**S3** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios	**S3** Ambiente matemático de comunicación
Aprendizajes de Trayectoria			
Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.	Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).	Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.	Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.
Metas de Aprendizaje			
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	**M1-C2** Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	**M1-C3** Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	**M1-C4** Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	**M2-C2** Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.	**M2-C3** Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	**M2-C4** Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.
M3-C1 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	**M3-C2** Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	**M3-C3** Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.	M3-C4 Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o a evaluación.
	M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	**M4-C3** Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	

Presentación

Es un placer presentarles este libro de *Pensamiento Matemático III,* que ha sido cuidadosamente diseñado para acompañar a las y los estudiantes de bachillerato en su fascinante travesía por el mundo de esa maravillosa forma matemática de pensar denominada pensamiento matemático, que proporciona una base sólida y estimulante para el aprendizaje.

Así, este libro es para utilizarse en la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) *Pensamiento Matemático III* del Recurso Sociocognitivo Pensamiento Matemático, correspondiente al tercer semestre del componente fundamental y extendido del plan de estudios (UAS, 2024) del Currículo del bachillerato de la Universidad Autónoma de Sinaloa 2024 que, de acuerdo con el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS) establecido por la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2023a), enfatiza el desarrollo del pensamiento matemático.

> El pensamiento matemático, según el MCCEMS, se define como:
> Un Recurso Sociocognitivo que involucra diversas actividades cognitivas que van desde la ejecución de operaciones y el desarrollo de procedimientos y algoritmos hasta abarcar procesos mentales abstractos, incluida la intuición, que se dan cuando el sujeto participa del quehacer matemático al resolver problemas, usar o crear modelos, elaborar tanto conjeturas como argumentos y organizar, sustentar y comunicar sus ideas. (SEP, 2023c, p. 17)

La secuencia de este libro está basada en progresiones de aprendizaje, cada una diseñada para desarrollar sobre la anterior un pensamiento matemático; para el caso particular de esta UAC, un pensamiento variacional.

En el sentido anterior, las progresiones de aprendizaje (PA) de la UAC Pensamiento Matemático III desarrollan el pensamiento variacional para el logro de las metas de aprendizaje en la siguiente secuencia:

- PA 1. La variación en procesos infinitos.
- PA 2. Problemas que dieron origen al cálculo diferencial.
- PA 3. Estudio del cambio de una función de variable real.
- PA 4. Gráfica de funciones de variable real.
- PA 5. El límite de una función de variable real.
- PA 6. Funciones continuas.
- PA 7. La definición de derivada.
- PA 8. Reglas básicas de derivación.
- PA 9. El concepto de la derivada como razón de cambio instantánea.
- PA 10. Aplicación de la derivada al análisis y graficación de funciones.

- PA 11. Modelación de funciones derivables y problemas de optimización.
- PA 12. Gráfica de funciones logarítmicas y exponenciales.
- PA 13. Estudio de fenómenos mediante funciones trigonométricas.
- PA 14. Modelación de situaciones mediante funciones derivables.
- PA 15. El teorema fundamental del cálculo.

Bajo esta lógica del proceso de desarrollo del pensamiento matemático, las progresiones de aprendizaje están estructuradas y secuenciadas, en el sentido de que cada una es más compleja que la anterior, de acuerdo al nivel de pensamiento matemático que demande cada progresión. Cada una de ellas, se inicia con una situación contextualizada o evaluación diagnóstica; luego, le siguen ejemplos, actividades y evaluación formativas diseñadas atendiendo a las subcategorías de las categorías del pensamiento matemático, mismas que orientan hacia el logro de las metas de aprendizaje; al final cuenta con instrumentos para la autoevaluación y coevaluación.

Además, en cada PA se consideran tres momentos claves de la evaluación: diagnóstica, formativa (mientras se aprende) y final; haciendo énfasis en la evaluación formativa en función de la retroalimentación, para que, durante el proceso de realizar las actividades de aprendizaje, las y los docentes puedan determinar el nivel de logro por los estudiantes, en particular, de las metas de aprendizaje que contribuyen a los aprendizajes de trayectoria. Es decir, se utiliza la evaluación formativa como herramienta para comprender su progreso y ajustar, en consecuencia, las estrategias activas.

También, durante el proceso de aprendizaje, en cada PA se lleva a cabo la autoevaluación (A), coevaluación (C) y heteroevaluación (H); para ello, se implementa como técnica principal de evaluación, la observación, utilizando guías específicas para tal fin. Los resultados se reflejarán en la tabla que aparece al inicio de cada progresión en correspondencia con el desempeño.

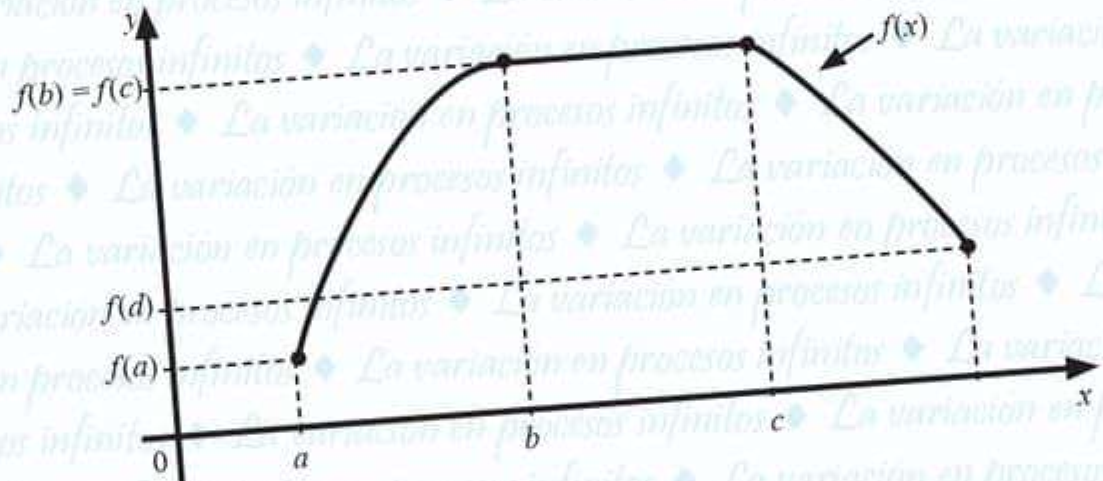
Por otra parte, se sugiere usar los códigos QR (generados en parzibyte: https://parzibyte.me/apps/generador-qr/), así como la Inteligencia Artificial y las aplicaciones de celular como aliados en este proceso de aprendizaje. En cuanto a las representaciones gráficas que se incluyen, estas fueron hechas en Desmos y GeoGebra, así como las figuras en Word y en Open IA.

Finalmente, el desarrollar un pensamiento matemático no solo les abrirá las puertas en el aula, sino que también los acompañará a lo largo de sus vidas, dotándoles de la capacidad de enfrentar cualquier desafío con ingenio y perspicacia.

¡Adentrémonos juntos en el fascinante universo
del pensamiento matemático!

Contenido

La variación en procesos infinitos



Progresión de aprendizaje 1

Genera intuición sobre conceptos como variación promedio, variación instantánea, procesos infinitos y movimiento a través de la revisión de las contribuciones que desde la filosofía y la matemática hicieron algunas y algunos personajes históricos en la construcción de ideas centrales para el origen del cálculo.

Meta de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 1.1

1. En cada proposición responde si es verdadera (V) o falsa (F):

Proposición	V	F
a) Dados dos conjuntos A y B, una función de A en B es una correspondencia en la que a cada elemento del conjunto A se le asocia un único elemento del conjunto B.		
b) Una función lineal es creciente si la pendiente de la gráfica que la representa es negativa.		
c) En la expresión de una función lineal $f(x) = mx + b$ el valor de m caracteriza la dirección y la inclinación de la recta respecto al eje de las abscisas.		

2. Marca con una ✕ la interpretación que consideras correcta para la expresión: "realizar un proceso infinitas veces", en matemáticas:

[ ] Describir situaciones en las que una operación se repite continuamente.

[ ] Repetir operaciones de forma continua, acercándose a un resultado específico, sin llegar a alcanzarlo por completo.

[ ] Buscar un valor que no se puede alcanzar.

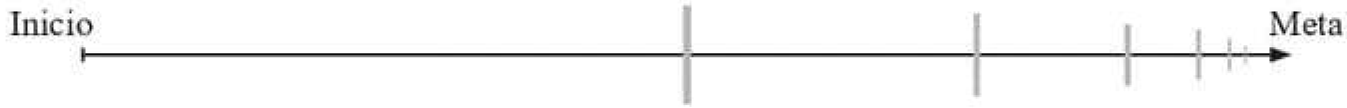
3. Dada la función $g(t) = -t^3 + 4t^2 + t$ el valor de $g(3) - g(2) =$ _________.

Detrás de cualquier invención, descubrimiento o nueva teoría, existe, indudablemente, la evolución de ideas que hacen posible su nacimiento. Lo que hoy se denomina Cálculo Infinitesimal o simplemente Cálculo, es un ejemplo de ello. El Cálculo cristaliza conceptos y métodos que la humanidad estuvo tratando de dominar por más de veinte siglos. Gran cantidad de científicos de diferentes épocas trabajaron con los métodos "infinitesimales", pero hubo que esperar hasta el siglo XVII para tener la madurez social, científica y matemática que permitiría construir y, a partir de ahí, desarrollar el Cálculo que utilizamos en nuestros días.

¿Pero, qué debemos entender por Cálculo Infinitesimal?

El Cálculo Infinitesimal está relacionado con los procesos infinitos a través de cambios continuos; en particular, al hacer, sucesivamente, determinado proceso tan pequeño como se quiera.

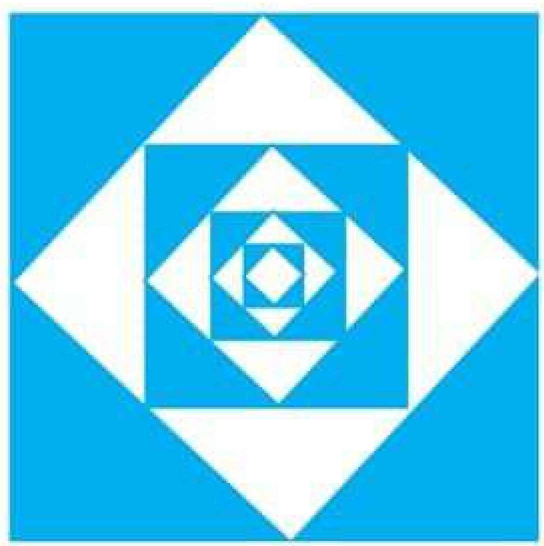
Imagina una carrera en la que el corredor avanza cada vez la mitad del trayecto que le queda por recorrer. Al representarnos esa carrera aparentemente es un proceso que no termina, así se acerque el corredor a la meta, pues por mucho que se reduzca el segmento que falta, siempre llega solo a la mitad, como se muestra a continuación.



¿Llegará el corredor a la meta? Este, es un ejemplo de un proceso infinito a los que el cálculo infinitesimal da respuesta, como irás aprendiendo a lo largo de esta Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC), Pensamiento Matemático III, pues comprobarás que se puede realizar un proceso infinitas veces y, no obstante, obtener un resultado.

Actividad formativa 1.1

1. Divide un segmento en dos partes iguales. A continuación, el segmento de la izquierda lo divides a la mitad y así sucesivamente. ¿A qué valor se aproxima la longitud del segmento en la medida que haces más divisiones?
2. Dibuja un cuadrado, cuyo lado tenga una unidad de longitud. Calcula la diagonal del cuadrado y construye, sobre uno de los vértices, un cuadrado que tenga como diagonal la mitad de la diagonal del cuadrado anterior y así sucesivamente. Obtén una expresión para el lado del cuadrado, después que hayas hecho n divisiones. ¿A qué valor se aproxima el lado del cuadrado?
3. La figura de la derecha muestra varios cuadrados inscritos en un cuadrado original. Obsérvala con atención, reflexiona y responde las siguientes preguntas:



   a) ¿Cuál es el procedimiento para dibujar los cuadrados inscritos? ____________________
   ____
   ____

   b) ¿Existe un límite en la cantidad de cuadrados inscritos que se pueden dibujar? __________
   Justifica ______________________________
   ____
   ____
   ____

c) ¿El proceso de construcción de cuadrados inscritos es un proceso finito o infinito? _____
____

d) ¿Es posible determinar la longitud de los lados y el área de cada uno de los cuadrados inscritos? _______ ¿Cómo harías el cálculo? ___________________________________
____
____

El cálculo infinitesimal está constituido por dos grandes ramas, el cálculo diferencial y el cálculo integral. El cálculo diferencial, en el cual te iniciarás a lo largo de esta UAC Pensamiento Matemático III, está basado en el concepto de movimiento instantáneo y estudia a través de procesos infinitos, por ejemplo, la variación o cambio de una magnitud o una función respecto a otra magnitud en un momento específico, mientras que el cálculo integral se ocupa, también mediante procesos infinitos, de resolver problemas como el área que se encuentra determinada bajo una curva cualquiera o volúmenes de determinados cuerpos.

Para conocer más sobre el significado del cálculo diferencial, en particular, observa el video que aparece en el código QR 1.1.

QR 1.1. Significado del Cálculo Diferencial. (Parzibyte, 2025).

Si bien Isaac Newton (Inglaterra, 1643-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (Alemania, 1646-1716), son considerados los padres del Cálculo, ellos representan un eslabón en una larga cadena iniciada muchos siglos antes, ya que algunas ideas del cálculo fueron desarrolladas tempranamente en las matemáticas griegas, chinas, indias e islámicas. Fueron ellos quienes dieron forma a los procedimientos infinitesimales de sus antecesores inmediatos y comenzaron el uso moderno del cálculo en Europa durante el siglo XVII. Con posterioridad, otros destacados matemáticos continuaron desarrollando el cálculo infinitesimal.

A continuación, te presentamos algunos de los principales precursores del Cálculo, destacando sus principales contribuciones.

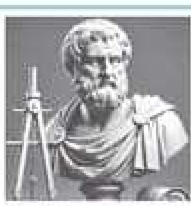
				
EUCLIDES (300 a.c)	ISAAC NEWTON (1643-1727)	GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716)	LEONHARD EULER (1707-1783)	JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736-1813)
Desarrolló los conceptos geométricos que sentarían las bases para el cálculo.	Formuló el cálculo diferencial e integral.	Desarrolló la notación que todavía se usa hoy. Utilizó por primera vez el cálculo para encontrar el área bajo la curva de una función.	Contribuyó al desarrollo del cálculo y la notación matemática.	Extendió y perfeccionó el cálculo de variaciones y a partir de sus aplicaciones a la mecánica, sentó los fundamentos de la llamada Mecánica analítica.

Figura 1.1. Precursores del Cálculo Infinitesimal.
Fuente: Elaboración propia (OpenAI, 2025).

Para conocer más sobre su desarrollo histórico, consulta el código QR 1.2.

QR 1.2. Desarrollo histórico del Cálculo Infinitesimal. (Parzibyte, 2025).

La importancia del cálculo infinitesimal radica en su capacidad para analizar y describir fenómenos que no pueden ser explicados por medio de la geometría clásica o el álgebra. Se utiliza para resolver problemas para los cuales las matemáticas de la antigüedad fueron insuficientes y permite entender cómo se mueven los objetos en el espacio, cómo cambian las variables en funciones matemáticas y cómo se relacionan diferentes magnitudes.

El cálculo infinitesimal abre puertas a campos dentro de la ingeniería, la física, la economía, la biología y otras áreas y posibilita modelar fenómenos para entender su comportamiento.

¿Alguna vez viste una carrera de autos? Todos las automóviles inician en condiciones iguales. La velocidad de partida es cero, el lugar de donde parten es casi el mismo y todos parten al mismo tiempo. Pero la llegada al final de cada uno de ellos no es la misma. Unos llegan antes que otros. Te has preguntado, ¿qué pasó a lo largo de la carrera? Si hacemos una foto del desarrollo en un momento dado, obtendríamos algo parecido a lo que observamos en la imagen de la Figura 1.2. Sin embargo, al final de la carrera solo cuenta el resultado, la posición en la que se ha llegado. Pero esa posición es fruto de los distintos instantes que componen la carrera. Adelantamientos, aceleración, frenada en las curvas, todo tiene que ver con la variación del movimiento en los momentos de la carrera.

Figura 1.2. Carrera de autos.
Fuente: Elaboración propia (OpenAI, 2025).

Variación promedio y variación instantánea

De manera general, cuando hablamos de la variación nos referimos a un cambio o movimiento, es decir, a un fenómeno que no está estático, sino dinámico. Tal es el caso de la variación de la temperatura del cuerpo cuando tenemos fiebre, al medirla en dos momentos distintos; el crecimiento de un recién nacido entre algunas semanas de diferencia; o bien, el movimiento de un vehículo en un intervalo de tiempo o cómo se mueve en un instante determinado.

Así, con este último ejemplo, podemos diferenciar entre la variación promedio y la variación instantánea como dos tipos de cambio que miden cómo varía un fenómeno o un suceso en función del tiempo en el que se calculan.

Variación, razón o tasa de cambio promedio

Consideremos una función que representa o caracteriza una determinada situación. La variación promedio o tasa de cambio promedio de una función en un intervalo es el número de unidades que crece (o decrece) la función por cada unidad que aumenta la variable independiente. Por tanto, la variación promedio de una función se calcula dividiendo el cambio total de la función en un intervalo entre la amplitud de ese mismo intervalo.

Si consideramos un intervalo $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ son los valores de la función en a y b, entonces:

$$\text{Variación promedio en } [a, b] = V_p[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

En correspondencia con el carácter de la función, la variación promedio puede ser positiva, negativa o cero, como se muestra en la Figura 1.3:

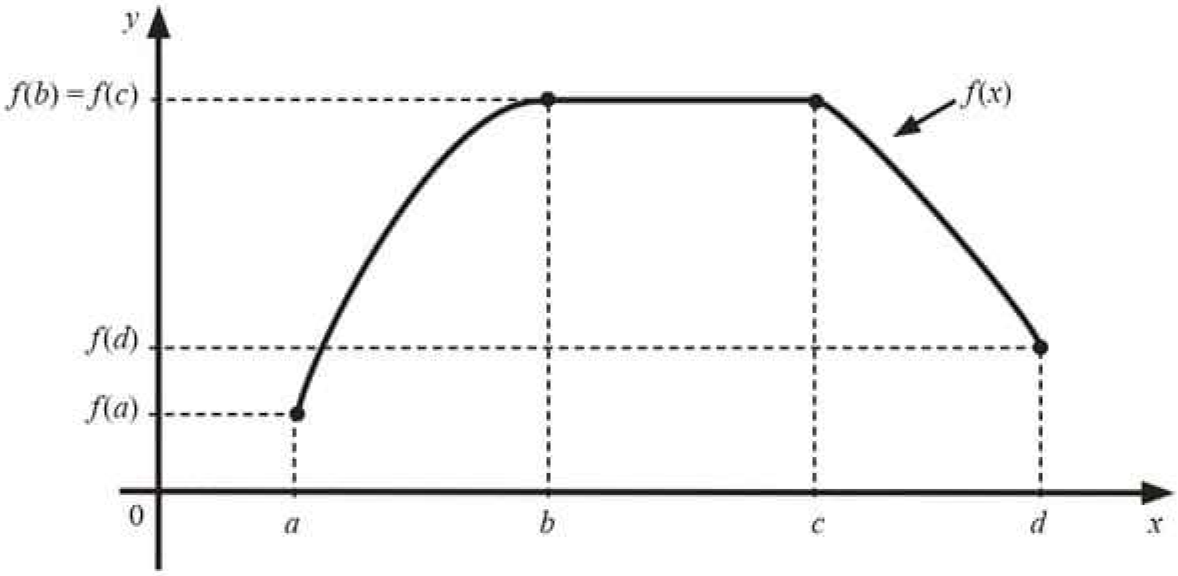


Figura 1.3. Gráfica de una función.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2025).

- Si $f(x)$ es estrictamente creciente en el intervalo $[a, b]$, la variación promedio es estrictamente positiva.

$$V_p[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$$

- Si $f(x)$ es constante en el intervalo $[b, c]$, la variación promedio en ese intervalo es cero.

 Como $f(x)$ es constante en $[b, c]$, $f(b) = f(c)$, luego $f(c) - f(b) = 0$

$$V_p[b, c] = \frac{f(c) - f(b)}{c - b} = 0$$

- Si $f(x)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $[c, d]$, la variación promedio es estrictaa mente negativa.

$$V_p[c, d] = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} < 0$$

Ejemplo formativo 1.1

1. Dada la función $f(x) = x^2 + 6$, calcula la variación promedio en los intervalos $[2, 5]$ y $[-3, 0]$.

Resolución

El primer paso es evaluar la función en $a = 2$ y $b = 5$:

$$f(2) = (2)^2 + 6 = 4 + 6 = 10 \text{ y } f(5) = (5)^2 + 6 = 25 + 6 = 31$$

Calcula la variación promedio de la función en el intervalo aplicando la fórmula de la variación promedio en el intervalo:

$$V_p[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$V_p[2, 5] = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{31 - 10}{5 - 2} = \frac{21}{3} = 7$$

Como resultado, obtenemos que la variación promedio en el intervalo $[2, 5]$, es positiva, indicando que la función en ese intervalo experimenta un incremento.

Ahora, considera la misma función $f(x) = x^2 + 6$ pero calcula su variación promedio en el intervalo $[-3, 0]$. El primer paso es evaluar la función en $a = -3$ y $b = 0$:

$$f(-3) = (-3)^2 + 6 = 9 + 6 = 15 \text{ y } f(0) = (0)^2 + 6 = 0 + 6 = 6$$

Posteriormente, calcula la variación promedio de la función en el intervalo aplicando la fórmula de la variación promedio:

$$V_p[-3, 0] = \frac{f(0) - f(-3)}{0 - (-3)} = \frac{6 - 15}{3} = \frac{-9}{3} = -3$$

Como resultado, obtenemos que la variación promedio en [–3, 0] es negativa, indicando que la función en ese intervalo experimenta un decrecimiento.

2. Un tren sale de una ciudad A hacia una ciudad B. En las primeras dos horas recorre 112 km y a las cuatro horas había recorrido 245 km. ¿Cuál es la velocidad promedio con la que recorrió ese trayecto del recorrido?

Resolución

La velocidad con que se desplaza el tren está dada por la expresión $v = \frac{d}{t}$.

En $t_1 = 2$ horas recorre una distancia $d_1 = 112$ km y en $t_2 = 4$ horas recorre una distancia $d_2 = 245$ km.

Por tanto, la velocidad promedio en ese trayecto es la variación promedio en el intervalo [2, 4]:

$$v = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1} = \frac{245 - 112}{4 - 2} = \frac{133}{2} = 66.5$$

La velocidad promedio con la que recorrió ese trayecto es de 66.5 km/h.

Actividad formativa 1.2

1. Calcula la variación promedio de las siguientes funciones en los intervalos dados.

   a) $f(x) = 2x^2 - \frac{3x}{5}$, en [5, 10]

   b) $g(x) = x^3 + x$, en [–3, 0]

   c) $f(x) = \frac{1}{x - 1}$, en $[2, 2 + h]$

2. En una carrera un atleta recorre los primeros tres segundos a una velocidad de 10 m/s. Después de los 8 segundos había recorrido 90 m. ¿Cuál es la velocidad promedio a la que recorrió ese segundo trayecto de la carrera?

Variación instantánea

Para aproximarnos al concepto de variación instantánea, partiremos de un ejemplo.

Ejemplo formativo 1.2

1. En el entrenamiento de un ciclista que se mueve a lo largo de una pista, el entrenador obtuvo las siguientes mediciones de su posición en diferentes tiempos, con un cronómetro electrónico:

   - A los 3 segundos, el ciclista ha recorrido 9 metros y a los 5 segundos, el ciclista está en la posición de 25 metros.
   - A los 3.5 segundos, el ciclista está en la posición 16 metros y a los 4.5 segundos, el ciclista está en la posición 20 metros.
   - A los 3.9 segundos, el ciclista está en la posición 18.5 metros y a los 4.1 segundos, el ciclista está en la posición 19.1 metros.
   - A los 3.99 segundos, el ciclista está en la posición 18.98 metros y a los 4.01 segundos, el ciclista está en la posición 19.02 metros.

- A los 3.999 segundos, el ciclista está en la posición 18.998 metros y a los 4.001 segundos, el ciclista está en la posición 19.002 metros.
- A los 3.9995 segundos, el ciclista está en la posición 18.999 metros y a los 4.0005 segundos, el ciclista está en la posición 19.001 metros.

El entrenador quiere conocer qué velocidad llevaba el ciclista a los 4 segundos de iniciar el entrenamiento. Calculemos la velocidad promedio en el primer intervalo:

$$v_p[3, 5] = \frac{\text{Posición 2} - \text{Posición 1}}{\text{Tiempo 2} - \text{Tiempo 1}} = \frac{25 - 9}{5 - 3} = 8 \text{ m/s}$$

Utilizando esa misma expresión puedes calcular la velocidad promedio en cada intervalo de tiempo considerado y así se completa la siguiente tabla.

Tiempo 1	Tiempo 2	Posición 1	Posición 2	Velocidad promedio
3	5	9	25	8
3.5	4.5	16	20	4
3.9	4.1	18.5	19.1	3
3.99	4.01	18.98	19.02	2
3.999	4.001	18.998	19.002	2
3.9995	4.0005	18.999	19.001	2

Con estos resultados el entrenador concluye que la velocidad en el segundo 4, es de 2 m/s.

El proceso de acercamiento a un determinado valor en el que se quiere conocer la variación instantánea de una función en ese valor constituye una forma aproximada de obtenerla; posteriormente, en esta UAC, estudiarás conceptos y métodos que permiten obtener la variación instantánea de una función a través de un proceso infinito.

Actividad formativa 1.3

1. Un objeto dejado caer desde una determinada altura se mueve en caída libre a una velocidad dada por la expresión $v(t) = gt$, donde $g = 9.8$ m/s^2 es la aceleración que ejerce la gravedad sobre todos los cuerpos.

Si se deja caer una pelota desde una altura de 160 m:

a) Determina la velocidad media o promedio a los tres segundos de caída.

b) Utilizando la fórmula $v_p = \frac{d_1 - d_2}{t_2 - t_1}$ completa la siguiente tabla para calcular la velocidad promedio en los intervalos de tiempo señalados:

Intervalo	[3, 4]	[3, 3.5]	[3, 3.1]	[3, 3.01]	[3, 3.001]	[3, 3.0001]
d_2						
d_1						
Velocidad media						

c) ¿A qué valor se aproxima la velocidad instantánea a los tres segundos?

Evaluación formativa 1.1

1. Construye un rectángulo de base 4 cm y ancho 2 cm. Divide a la mitad el rectángulo y una de las mitades resultantes divídela a la mitad; así sucesivamente continúa construyendo rectángulos.

   a) ¿En cuántos pasos termina el proceso de construir rectángulos?

   b) ¿Cuál sería la suma de las áreas de los rectángulos obtenidos?

2. Calcula la variación promedio de la función $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ en el intervalo $[2, 5]$.

3. Durante una competencia de ciclistas realizada en la ciudad de Guadalajara, que duró 5 horas, se estudió, en particular, la velocidad promedio de dos de los ciclistas concursantes. El desplazamiento del primero se caracterizó por la función $f(t) = -2t^3 + 9t$, mientras que el del segundo fue determinado por la función $g(t) = -t^3 + 4t^2 + t$.

   a) Halla la variación promedio de la velocidad de cada uno de los ciclistas en las primeras 2 horas.

   b) ¿Cuál consideras tuvo mayor rendimiento?

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ______________________________ Plantel: ______________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 1. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Analicé, a partir de ejemplos, cómo a través de procesos infinitos, se puede obtener la variación o cambio de una magnitud o una función respecto a otra magnitud. (M1-C2)			

Coevaluación para el aprendizaje

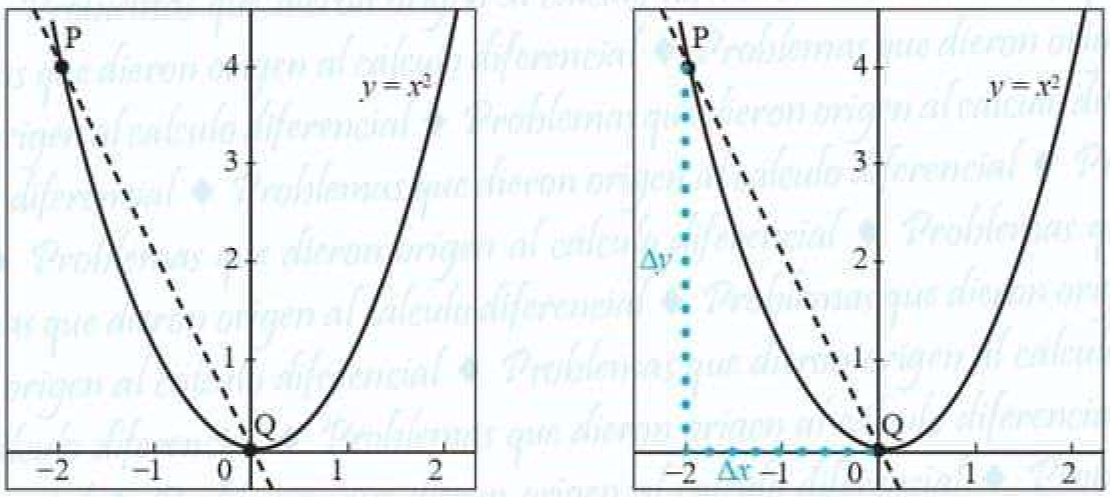
Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 1 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Analizó a partir de ejemplos cómo a través de procesos infinitos, se puede obtener la variación o cambio de una magnitud o una función respecto a otra magnitud. (M1-C2)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Problemas que dieron origen al cálculo diferencial



Progresión de aprendizaje 2

Analiza de manera intuitiva algunos de los problemas que dieron origen al cálculo diferencial, en particular el problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M3-C3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del Pensamiento Matemático, de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 2.1

Relaciona las siguientes columnas.

Definición		Concepto
1. Par de valores que representan la ubicación de un punto en un plano.	[	] Recta tangente a una curva
2. Expresión matemática de la forma: $y = mx + b$	[	] Coordenadas de un punto
3. Relación entre el cambio en y con el cambio en x de una recta.	[	] Función lineal
4. Rama de las matemáticas que estudia las figuras geométricas utilizando coordenadas y ecuaciones.	[	] Geometría analítica
5. Recta que interseca a una curva en dos puntos distintos.	[	] Geometría sintética
6. Recta que toca la curva en un solo punto.	[	] Pendiente de la recta
7. Rama de las matemáticas que estudia las propiedades y relaciones de las figuras geométricas sin recurrir a coordenadas, se basa en postulados básicos y teoremas.	[	] Recta secante

De la geometría antigua al cálculo moderno: el problema de la tangente

Imagina que eres un estudiante de bachillerato apasionado por las matemáticas y te enfrentas a un problema que ha interesado a los matemáticos durante siglos: ¿cómo puedes encontrar la pendiente de una curva en un punto específico? Esta cuestión es fundamental para comprender fenómenos en física, ingeniería, economía y otras ciencias.

El cálculo de la recta tangente en un punto de una curva tiene sus raíces en los antiguos matemáticos griegos, como Euclides, Apolonio y Arquímedes. Ellos definieron la **recta tangente como aquella que toca a la curva en un punto y sigue su misma dirección sin cruzarla**. En una segunda etapa, matemáticos como Descartes, Fermat, Torricelli y Barrow aplicaron cálculos algebraicos, máximos y mínimos, así como límites, para encontrar la recta tangente en curvas más complejas. Finalmente, en una tercera etapa, Isaac Newton en Inglaterra (Figura 2.1) y Gottfried Wilhelm Leibniz en Alemania, (Figura 2.2), considerados los fundadores del cálculo infinitesimal, desarrollaron de manera independiente esta rama completamente nueva de las matemáticas, como ya conoces de la progresión de aprendizaje anterior. Uno de los problemas clave que abordaron fue determinar la **pendiente de una recta tangente a una curva en un punto dado**.

Figura 2.1. Issac Newton (1643-1727).
Fuente: Elaboración propia (OpenAI, 2025).

Figura 2.2. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).
Fuente: Elaboración propia (OpenAI, 2025).

La recta tangente tiene gran importancia, es fundamental en el estudio de las matemáticas puras, así como en aplicaciones en ingeniería, física, economía y otras disciplinas que dependen de la comprensión de cambios y variaciones en sistemas dinámicos.

Si tu familia posee una parcela agrícola donde cultivan tomates, uno de los desafíos que enfrenta es maximizar la producción de tomates a lo largo del tiempo. Para tomar decisiones informadas sobre la siembra y cosecha, necesitas comprender cómo cambia la producción de tomates con respecto a varios factores, por ejemplo, la cantidad de fertilizante utilizado o el tiempo de crecimiento de las plantas. Es necesario considerar cómo la producción de tomates (en kilogramos) cambia con el tiempo (en semanas) y si la producción de tomates $P(t)$, como función del tiempo t, se puede modelar mediante la siguiente función cuadrática:

$$P(t) = -2t^2 + 8t + 20,$$

entonces aquí es donde el estudio del cambio de una función de variable real, a través del cálculo diferencial, se vuelve decisivo.

La recta tangente: un acercamiento intuitivo

Pensemos en un coche que sigue una carretera con curvas. En cada punto de esa carretera, el coche sigue una dirección particular. Esa dirección es la que describe la recta tangente en ese punto. Aunque la carretera es curva, la recta **tangente es una línea recta** que toca la curva en un solo punto y no la corta, y nos da información sobre la dirección que lleva el coche en ese instante. Sin embargo, en algunos casos, la recta tangente en ese punto puede cortar la curva en otro punto. Esto ocurre cuando la curva tiene una forma tal que la tangente, al extenderse, vuelve a encontrarse con la curva en un punto diferente.

Con la siguiente actividad, vamos a revisar y reforzar un concepto fundamental de la geometría sintética: la tangente, la cual ya se trató en *Pensamiento Matemático II*.

Actividad formativa 2.1

1. Para el desarrollo de la actividad necesitas un juego geométrico. Mientras trabajas, piensa en la naturaleza de la tangente. ¿Qué observas? ¿Dónde toca la recta a la curva? Una propiedad clave que debes recordar es que la tangente toca a la curva exactamente en un solo punto.

   a) Dibuja rectas tangentes sobre círculos siguiendo los pasos que se muestran a continuación:

   Paso 1. Dibuja tres círculos en tu cuaderno de al menos 2 cm de radio.

   Paso 2. En cada círculo dibuja un punto en la circunferencia.

   Paso 3. Traza una recta que solo toque a cada círculo en el punto dibujado en el paso 2.

   Paso 4. ¿Cómo se le llama a la recta que toca al círculo en un solo punto?

   Paso 5. Traza una recta normal a la recta tangente en el punto dado en cada círculo.

   Paso 6. Del paso anterior, ¿esa recta perpendicular contiene al radio del círculo?

   b) Dibuja una recta tangente a la curva con apoyo de una parábola siguiendo los pasos que se muestran a continuación:

   Paso 1. Dibuja en tu cuaderno una parábola con vértice V y cuyo eje de simetría sea una recta l.

   Paso 2. Traza el segmento $\overline{AP}$, de tal manera que sea perpendicular a l, donde A está sobre la recta l y P sobre la parábola.

   Paso 3. Sobre l traza el punto B, tal que $\overline{AV} = \overline{VB}$, es decir, la distancia de A a V es igual a la distancia de V a B.

   Paso 4. Traza una recta que pase por los puntos $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{B}$.

   Paso 5. ¿Cómo se le llama a la recta que toca la curva en un solo punto?

La recta tangente: dirección y análisis local de curvas

El objetivo de conocer la recta tangente en una curva es fundamentalmente comprender cómo se comporta la curva en un punto específico. Este conocimiento nos permite determinar la dirección de la curva en ese punto, es decir, la inclinación o pendiente de la curva en relación con los ejes cartesianos; al respecto, algunos puntos clave para ampliar esta idea son:

1. **Pendiente de la curva en el punto:** la pendiente nos dice si la curva está subiendo (pendiente positiva), bajando (pendiente negativa), o si es horizontal en ese punto (pendiente cero).
2. **Aproximación local:** la recta tangente proporciona la mejor aproximación lineal a la curva cerca de ese punto. Si ampliamos la visión, una curva puede parecer complicada y no lineal, pero a escala local, la recta tangente nos da una representación lineal sencilla.

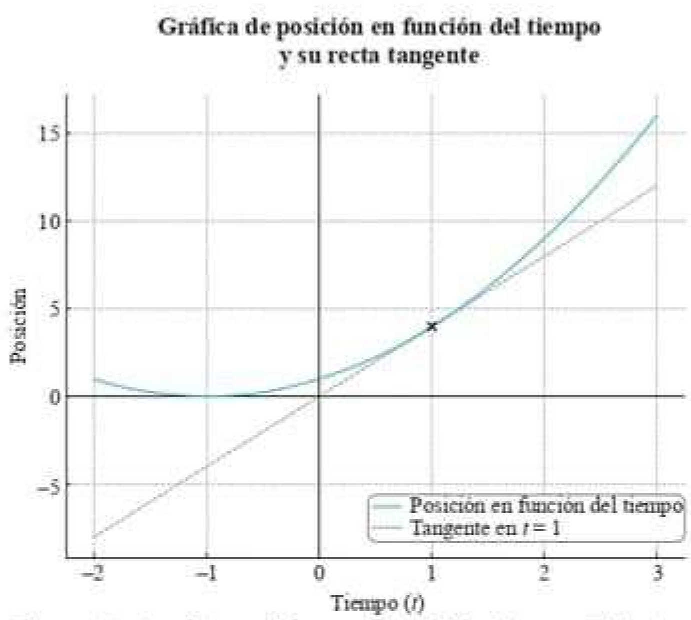


Figura 2.3. Pendiente de la curva posición-tiempo (Física).
Fuente: Elaboración propia (OpenAI, 2025).

3. **Aplicaciones:**
   - En la física, esta información es clave para determinar la velocidad instantánea de un objeto en movimiento. La pendiente de la curva de posición-tiempo en un instante nos indica la velocidad en ese momento (ver Figura 2.3).
   - En la economía, como se representa en la Figura 2.4, puede utilizarse para medir la razón de cambio de una variable, como los ingresos o costos, en relación con otra variable, como la cantidad de producción.
   - En ingeniería, ayuda a comprender la inclinación o dirección de una superficie en un punto dado (ver Figura 2.5).
4. **Transición al cálculo diferencial.** Al estudiar la recta tangente, estamos abordando uno de los problemas que dio origen al cálculo diferencial, planteado inicialmente por matemáticos como Fermat y Descartes, quienes buscaban la inclinación de curvas en un punto sin necesitar una fórmula explícita para la curva.

   Por tanto, conocer la recta tangente no solo nos informa sobre la dirección de una curva en un punto, sino que también es una herramienta clave para analizar cómo cambian los fenómenos que modelamos mediante funciones matemáticas.

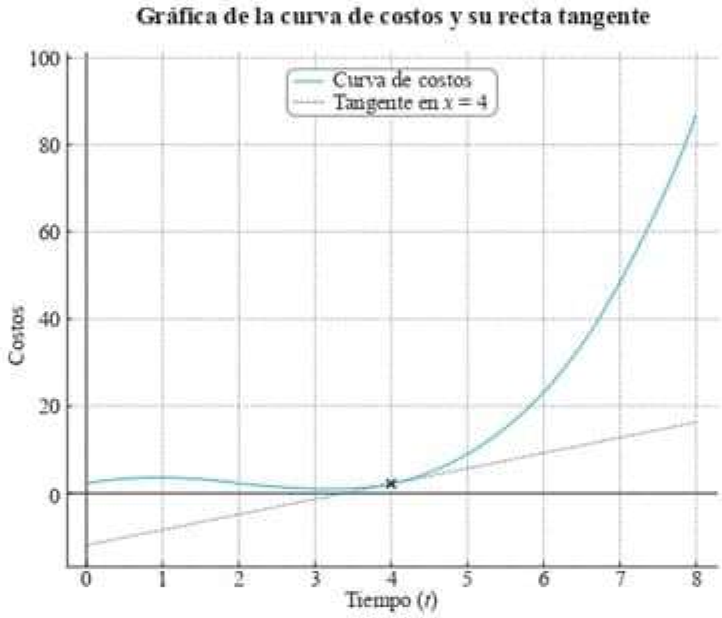


Figura 2.4. Tasa de cambio (Economía).
Fuente: Elaboración propia (OpenAI, 2025).

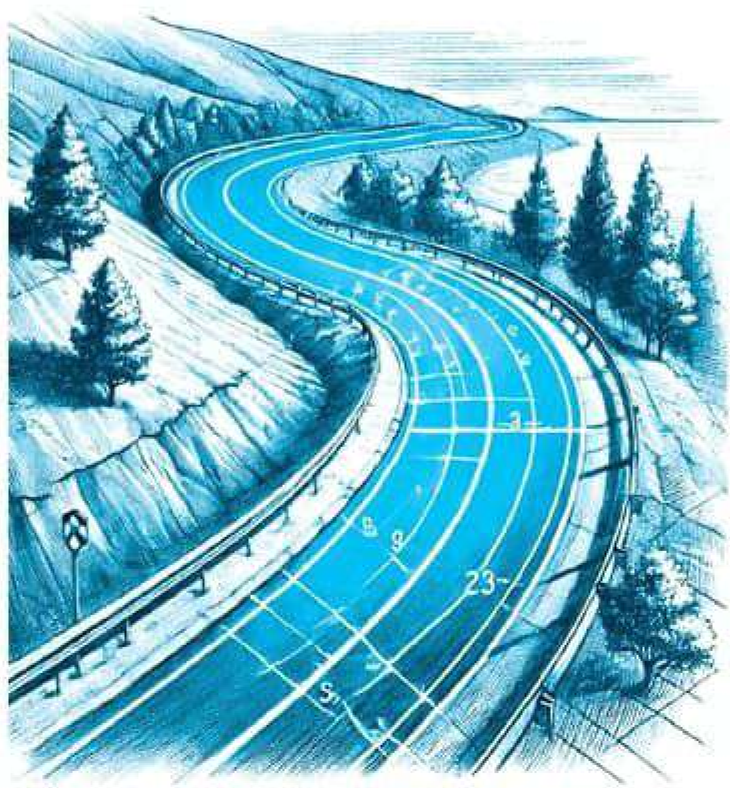


Figura 2.5. Inclinación o dirección de una superficie (Ingeniería.)
Fuente: Elaboración propia (OpenAI, 2025).

La recta secante y su relación con la recta tangente

La relación entre la recta secante y la recta tangente radica en que la recta secante sirve como una aproximación del comportamiento de la curva entre dos puntos, mientras que la recta tangente representa el comportamiento instantáneo en un solo punto. Una recta secante es aquella que corta una curva en dos o más puntos distintos. A medida que los dos puntos de la curva que determinan la recta secante se acercan entre sí, es decir, cuando la distancia entre ellos tiende a cero, la recta secante se convierte en la recta tangente en un punto.

Por lo tanto, la recta tangente puede considerarse como el caso límite de la recta secante, proporcionando la pendiente exacta y la razón de cambio instantánea en un punto específico de la curva, mientras que la recta secante ofrece una razón de cambio promedio entre dos puntos distintos.

Ejemplo formativo 2.1

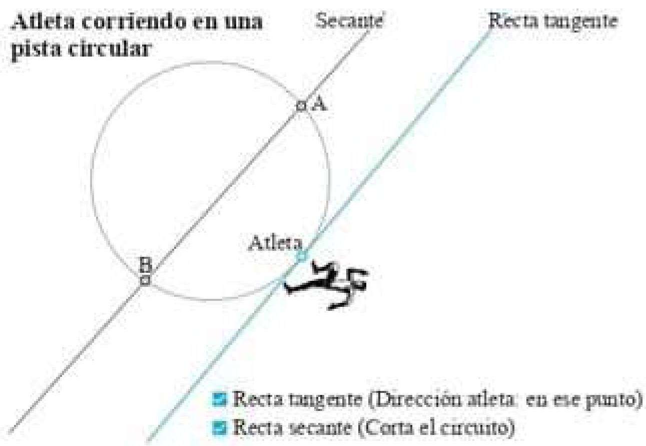
1. Un atleta está corriendo en una pista circular, como se muestra en la Figura 2.6. En cada momento, el atleta cambia de dirección, pero en un instante específico, la dirección en la que está corriendo puede representarse mediante una recta tangente a la pista en ese punto.
   a) Escribe la ecuación de un círculo centrado en el origen.
   b) Utiliza el applet para manipular el punto sobre la circunferencia del círculo, el cual representa al atleta en movimiento.

Figura 2.6. Atleta corriendo en una pista circular.
Fuente: Elaboración propia (OpenAI, 2025).

Resolución

a) **Lenguaje matemático.** Si la pista es un círculo su ecuación centrada en el origen es: $x^2 + y^2 = r^2$.

b) **Applet.** Atleta corriendo en la pista circular https://www.geogebra.org/m/bwhwh2sx



Interpretación

Se observa que, aunque la pista es curva, en un instante específico el atleta sigue una línea recta, que corresponde a la dirección de la tangente.

Actividad formativa 2.2

1. **Movimiento de un coche en una carretera montañosa:** un coche se mueve por una carretera sinuosa en las montañas. Si queremos saber hacia dónde se dirige exactamente en un momento dado, podemos observar la dirección de la recta tangente a la carretera en ese punto (Figura 2.7).
   a) ¿Qué representa la recta tangente a la carretera en el punto donde se encuentra el coche?
   b) Si observamos que la carretera se hace más curva en un tramo, ¿cómo cambiaría la recta tangente en comparación con un tramo más recto?

Figura 2.7. Carretera sinuosa.
Fuente: Elaboración propia (OpenAI, 2025).

Actividad formativa 2.3

1. **La sombra de un árbol:** pensemos en la sombra de un árbol que cambia de dirección a lo largo del día. Si graficamos la posición de la sombra con el tiempo, la curva resultante puede tener tangentes que representen la dirección en la que se proyecta la sombra en un momento dado (Figura 2.8).

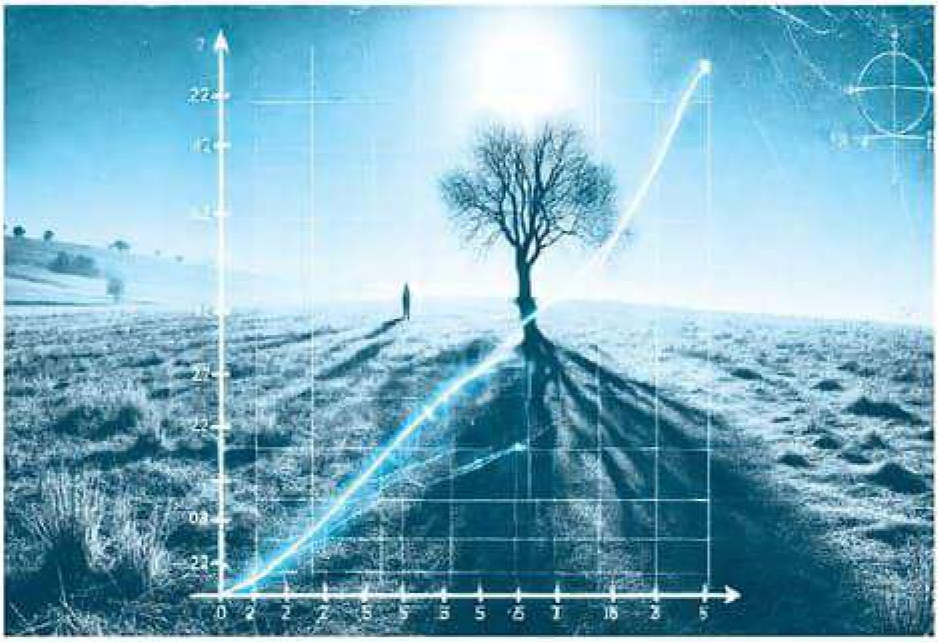


Figura 2.8. Sombra de un árbol.
Fuente: Elaboración propia (OpenAI, 2025).

   a) ¿Qué representa la recta tangente a la curva que describe la posición de la sombra del árbol en un momento específico del día?

   b) Si la sombra se desplaza más rápidamente durante el mediodía, ¿cómo afectaría esto a la pendiente de la recta tangente en ese tramo de la gráfica?

   c) ¿Cómo cambiaría la recta tangente si la sombra del árbol se moviera más lentamente al amanecer o al atardecer?

Según lo analizado podemos establecer la definición de recta tangente a una curva.

Definición de recta tangente a una curva

Una recta tangente a una curva es una recta que toca la curva en un único punto y que no la cruza en ese punto.

En el punto de tangencia, la recta tiene la misma dirección que la curva, lo que significa que comparte la misma pendiente que la curva en ese punto. Es, por así decirlo, una aproximación lineal de la curva en un entorno muy pequeño alrededor del punto de tangencia. El objetivo de conocer la recta tangente en cualquier curva es determinar la dirección de la curva en un punto específico.

En el siguiente applet que aparece en el código QR 2.1, escribe diversas funciones con el objetivo de practicar el trazado de rectas tangentes a una curva en distintos puntos, en el **applet: recta tangente a una curva.**

QR 2.1. Applet de GeoGebra. (Parzibyte, 2025).

El concepto de recta tangente: una aproximación intuitiva y visual para el estudio de curvas

Observa la Figura 2.9; identifica la recta $y = 1$; así como la curva $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$; en el punto $B(0, 1)$ la recta es tangente a la curva. En los puntos A y C, la recta corta a la curva.

La recta tangente está estrechamente relacionada con la idea de pendiente. Intuitivamente, la pendiente de una curva en un punto es la inclinación de la curva en ese punto, y la recta tangente es la línea que tiene esa misma inclinación.

Ahora, podemos imaginar que estamos observando una curva muy de cerca.

Si hacemos un zoom suficientemente grande en un punto de la curva, la curva comenzará a parecerse a una línea recta. Esa línea recta es lo que llamamos la recta tangente en ese punto.

Esta aproximación lineal es útil porque las líneas rectas son mucho más fáciles de manejar matemáticamente que las curvas. La recta tangente nos da una manera de simplificar el estudio de las curvas al aproximarlas por líneas rectas en puntos específicos.

La determinación de la recta tangente tiene aplicaciones prácticas en muchas áreas.

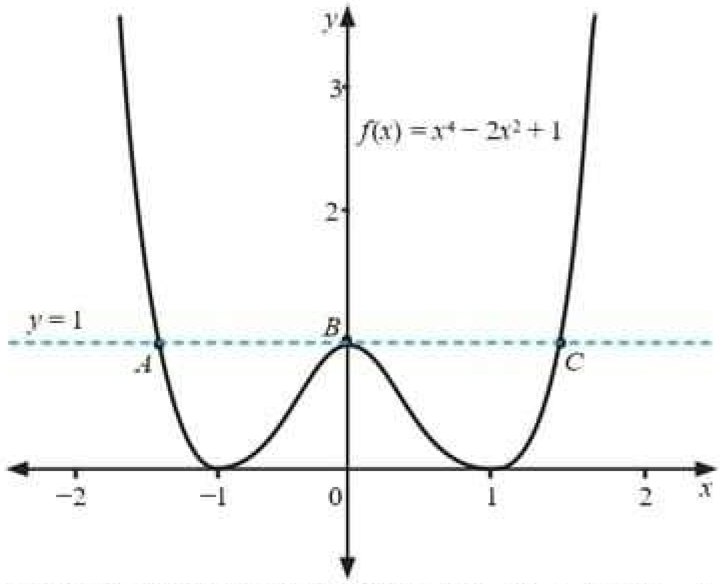


Figura 2.9. Graficas de las funciones: $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$; $y = 1$
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2025).

Actividad formativa 2.4

1. ¿Cómo se puede interpretar la recta tangente en el contexto de un coche que sigue una carretera curva?
2. ¿Por qué se dice que la recta tangente toca la curva en un solo punto y no la corta?
3. ¿En qué casos la recta tangente sí puede cortar la curva?

Cálculo de la pendiente de la recta tangente a partir de la recta secante

Para abordar el cálculo de la recta tangente, es útil revisar algunos conceptos de la geometría analítica y sintética. En particular, de la geometría analítica, la pendiente de una recta y las ecuaciones de líneas y curvas. De la geometría sintética, las propiedades de los triángulos y los ángulos. Estas propiedades nos ayudarán a visualizar mejor las relaciones entre la curva y su tangente, ya que, por ejemplo, podemos usar la geometría analítica para encontrar la ecuación de una curva y luego aplicar métodos de la geometría sintética para entender las propiedades de la tangente.

El cálculo diferencial surgió, como ya conoces, a partir de la necesidad de resolver problemas relacionados con el cambio y la variación, especialmente en geometría y física. Uno de los problemas centrales que motivaron el desarrollo de estas ideas fue, precisamente, el de determinar la **recta tangente** a una curva en un punto dado. A continuación, se analizan algunos problemas de manera intuitiva, los cuales fueron clave para el nacimiento del cálculo diferencial.

Ejemplo formativo 2.2

1. Traza la recta tangente a $f(x) = x^2$, en el punto $P(-2, 4)$.

Resolución

Inicia con el trazo de la recta secante que pasa por los puntos $P(-2, 4)$ y $Q(0, 0)$ de la función (Figura 2.10), siendo $x_0 = -2$, $y_0 = 4$, así como $x_1 = 0$, $y_1 = 0$.

La recta $\overleftrightarrow{PQ}$ tiene una variación en x, $\Delta x = x_1 - x_0$, luego $x_1 = x_0 + \Delta x$.

La recta $\overleftrightarrow{PQ}$ también tiene una variación en y, $\Delta y = y_1 - y_0$, luego $y_1 = y_0 + \Delta y$ (Figura 2.11).

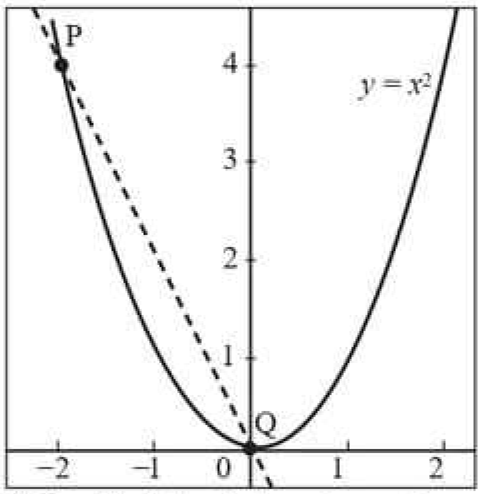


Figura 2.10. Función $f(x) = x^2$ y la recta secante que pasa por los puntos P y Q.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2025).

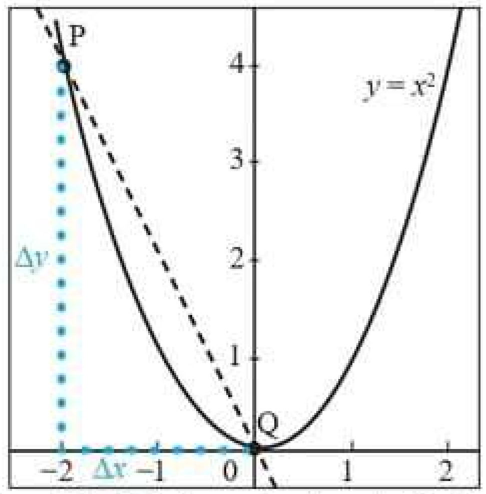


Figura 2.11. Variaciones Δx y Δy entre P y Q.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2025).

Recuerda que $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, pues son las imágenes de f evaluadas en x_0 y x_1 respectivamente.

Sustituyendo $\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

A partir de las variaciones en x y en y, se tiene la razón de cambio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de $f(x) = x^2$ que es la pendiente de la recta secante que pasa por P y Q.

$$m_{sec} = \frac{\text{Cambio en la ordenada } y}{\text{Cambio en la abscisa } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Evalúa para $P(-2, 4)$ y $Q(0, 0)$.

Como $x_0 = -2$, $y_0 = 4$ y $x_1 = 0$, $y_1 = 0$

se tiene:

$\Delta x = x_1 - x_0 = 0 - (-2) = 2$

$f(x_0 + \Delta x) = f(-2 + 2) = (0)^2 = 0$

$f(x_0) = (-2)^2 = 4$

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0 - 4 = -4$

$m_{sec} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{-4}{2} = -2$

Evalúa para $P(-2, 4)$ y $Q(-1, 1)$.

Como $x_0 = -2$, $y_0 = 4$ y $x_1 = -1$, $y_1 = 1$

se tiene:

$\Delta x = x_1 - x_0 = -1 - (-2) = -1 + 2 = 1$

$f(x_0 + \Delta x) = f(-2 + 1) = (-1)^2 = 1$

$f(x_0) = (-2)^2 = 4$

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 1 - 4 = -3$

$m_{sec} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{-3}{1} = -3$

Observa que, a medida que x_1 se acerca a x_0, la diferencia Δx decrece y se va aproximando a cero. Consecuentemente $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ también decrece y las rectas secantes varían sucesivamente hasta que se obtiene la recta que es tangente a $f(x) = x^2$ en el punto $P(-2, 4)$.

Mediante el ejemplo anterior, hemos visto el proceso para trazar una recta tangente a la función $y = f(x)$ en el punto $P(x_0, f(x_0))$. Pero, ¿cuál es la ecuación de la recta tangente?

De la recta tangente, se conoce el punto de tangencia $P(x_0, y_0)$, y para determinar la ecuación en la forma punto-pendiente: $y - y_0 = m_{tan}(x - x_0)$ se necesita calcular la pendiente m_{tan}, la cual puedes obtener, en forma aproximada, seleccionando un punto cercano al punto de tangencia, digamos $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, siendo h un pequeño incremento respecto a x_0 y proceder como en el Ejemplo formativo 2.2, acercando sucesivamente $x_0 + h$ a x_0 y obtener así la ecuación aproximada de la recta tangente: $y - y_0 = m_{tan}(x - x_0)$.

Esta ecuación se puede transformar en la ecuación pendiente-ordenada al origen $y = m_{tan}x + b$, por transposición de términos haciendo $b = y_0 = f(x_0)$. La forma exacta de obtener la ecuación de la recta tangente la estudiarás en una progresión de aprendizaje posterior.

QR 2.2. Applet de GeoGebra.
Fuente: Parzibyte, 2025.

Con ayuda del siguiente applet, código QR 2.2, simula el acercamiento del punto Q al punto P, además mueve el punto A (forma un ángulo de 90 grados) y observa el valor de Δx y Δy. El applet muestra la pendiente de la recta secante $\overline{PQ}$. Además, muestra la ecuación de la recta tangente en el punto P.

Evaluación formativa 2.1

1. Responde las siguientes preguntas considerando la relación entre la pendiente de una curva y su recta tangente.
   a) ¿Cómo se relaciona la pendiente de una curva en un punto con la recta tangente en ese punto?
   b) ¿Por qué es útil hacer una aproximación lineal de una curva en un punto utilizando su recta tangente en ese punto?
   c) ¿En qué casos la recta tangente puede cortar la curva en otros puntos, como ocurre en los puntos *A y C* de la Figura 2.10?
2. Si tu familia posee una parcela agrícola donde cultivan tomates, uno de los desafíos que enfrenta es maximizar la producción de tomates a lo largo del tiempo. Para tomar decisiones informadas sobre la siembra y cosecha, necesitas considerar que la producción de tomates (en kilogramos) cambia con respecto al tiempo (en semanas). Si se considera que la producción de tomates como $P(t)$ en función del tiempo t, se puede modelar mediante la siguiente función cuadrática: $P(t) = -2t^2 + 8t + 20$, responde las siguientes preguntas apoyándote, cuando corresponda, en el siguiente applet:

   https://www.geogebra.org/m/dv74qkzy

   a) Escribe la variable producción de tomates en kilogramos en función del tiempo.
   b) Escribe la variable referente al tiempo de crecimiento de las plantas en semanas.
   c) La producción de tomates, $P(t)$, en función del tiempo (semanas), está modelada por una función cuadrática, ¿cuál es?
   d) ¿La función es cóncava hacia arriba o hacia abajo?
   e) ¿Qué representa el término constante 20?
   f) ¿En la función se observa un punto mínimo o máximo?
   g) ¿Cuándo ocurre la máxima producción?
   h) ¿Cuál es el objetivo del problema?
   i) ¿Cuáles son las coordenadas del punto de tangencia cuando la pendiente de la recta tangente es igual a cero?
   j) ¿Qué indica el punto $T(2, 28)$?

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ____________________________________ Plantel: _________________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 2. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Utilicé el concepto de secante y sus propiedades para obtener la tangente a una curva en uno de sus puntos. (M3-C3)			
Determiné tanto de forma gráfica como intuitivamente la recta tangente como aproximación de la recta secante. (M1-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

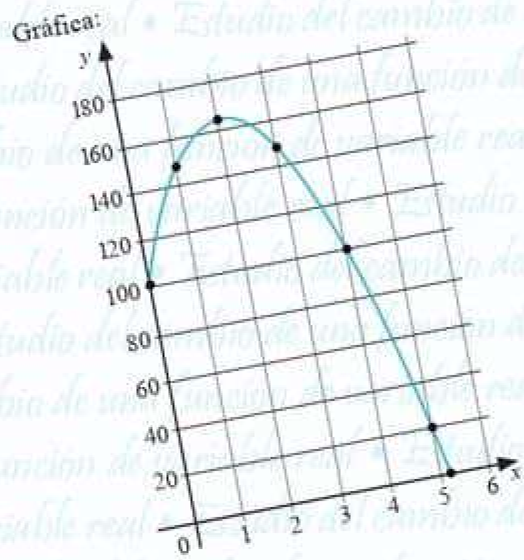
Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 2 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Utilizó el concepto de secante y sus propiedades para obtener la tangente a una curva en uno de sus puntos. (M3-C3)			
Determinó tanto de forma gráfica como intuitivamente la recta tangente como aproximación de la recta secante. (M1-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Estudio del cambio de una función de variable real



Progresión de aprendizaje 3

Revisa situaciones y fenómenos donde el cambio es parte central en su estudio, con la finalidad de modelarlos aplicando algunos conocimientos básicos de funciones reales de variable real y las operaciones básicas entre ellas.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C3 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 3.1

1. Se realizó un experimento en el que se registró la distancia que se desplaza un automóvil después de frenar, durante el tiempo medio de reacción, para algunos valores diferentes de la velocidad. Selecciona en cada caso la respuesta correcta:

   a) ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas representa el comportamiento mostrado en la tabla y la gráfica de la derecha?

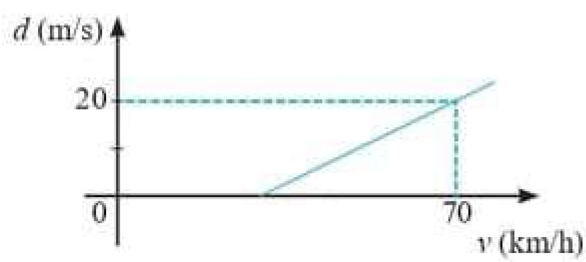
   i. $d = v - 15$

   ii. $d = v + 15$

   iii. $d = \frac{1}{2}v - 15$

   iv. $d = \frac{1}{2}v + 15$

v: velocidad en km/h	d: distancia en metros
30	0
50	10
60	15
70	20



   b) La velocidad máxima v a la que el automóvil debe desplazarse para que pueda detenerse casi instantáneamente es:

   i. 20 km/h   ii. 30 km/h   iii. 35 km/h

c) La distancia que recorre el automóvil antes de detenerse después de frenar, cuando viaja a 130 km/h es:

i. 30 m   ii. 40 m   iii. 50 m

2. Si $g(x) = x^2 - 3x - 10$ y $h(x) = x + 2$, ¿cuál es el resultado de la operación $(g/h)(x)$? Argumenta tu respuesta.

i. $x + 5$

ii. $x - 5$

iii. $x - 2$

El fenómeno del cambio y su modelación con funciones de variable real

Aunque parezca contradictorio, el cambio es una constante en nuestro universo ya que se presenta en todos lados y en todo momento. Este fenómeno, no es ajeno al ingenio humano, de hecho, desde la prehistoria el homo sapiens ha aprovechado la observación de los patrones en los cambios de la naturaleza para predecir y anticiparse a eventos para su beneficio; por ejemplo, el cambio de estación para establecer el inicio de un ciclo agrícola, el cambio de color y de tamaño de un fruto para saber cuándo realizar la cosecha, entre otras situaciones.

Predecir un cambio resulta ventajoso para un individuo o una comunidad, por lo que es entendible la tendencia del ser humano a perfeccionar cómo analizar el cambio. En este sentido, las funciones de variable real son de gran utilidad, pues permiten modelar, tanto fenómenos naturales como artificiales, a través de la relación que tienen determinados parámetros (las variables), como el tiempo o la utilización de un recurso, con respecto al comportamiento de otro parámetro o su disponibilidad.

En la UAC Pensamiento Matemático II, al aplicar las funciones lineales en la solución de problemas, estudiaste el concepto general de función, que es importante recordar para el tratamiento de esta progresión: una función: $\boldsymbol{f}$ es una regla que produce una correspondencia entre dos conjuntos, de modo que a cada valor $\boldsymbol{x}$ del primer conjunto, que se denomina dominio de la función, le hace corresponder **un único valor $\boldsymbol{f(x)}$** perteneciente al otro conjunto que se le llama codominio de la función.

Por tanto, una función es una relación, que se establece a través de una regla entre un valor de entrada (variable independiente) y un valor de salida (variable dependiente), de tal manera que, siempre que se asigne un valor de entrada, la correspondencia de la regla determinará exactamente un valor de salida, que forma el conjunto imagen o rango (R_f), dentro del codominio de la función (Figura 3.1).

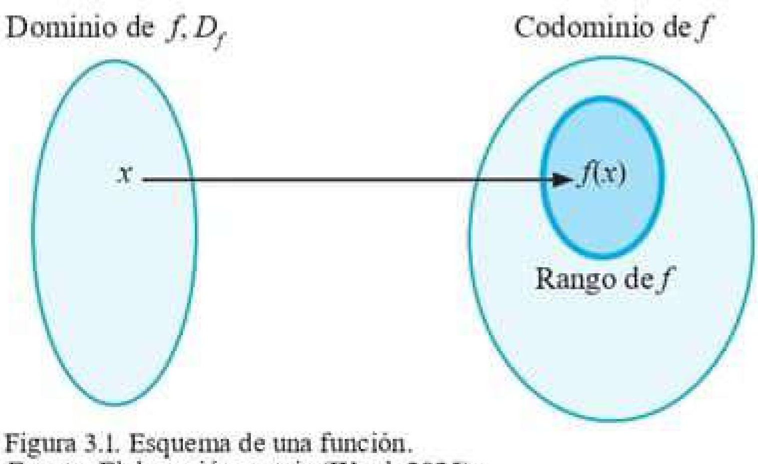


Figura 3.1. Esquema de una función.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2025).

Si el dominio y el codominio son subconjuntos del conjunto de los números reales la función se denomina numérica o de variable real.

Las funciones proporcionan un medio para describir y comprender relaciones entre variables y se pueden representar de diferentes formas, como ya estudiaste: a través de una descripción verbal, una expresión algebraica, un conjunto de pares ordenados, una tabla de valores o mediante una gráfica, que se obtiene representando los pares ordenados $(x, f(x))$ como puntos del plano cartesiano.

De acuerdo con lo anterior, del ejercicio 1 en la evaluación diagnóstica, puedes concluir que:

a) Las variables que proporcionan el medio para describir y comprender la relación entre ellas son la distancia recorrida (d) y la velocidad del vehículo (v).

b) La regla que establece la relación entre las variables es la expresión algebraica: $d = \frac{1}{2}v - 15$.

c) Sobre los valores que pueden tomar las variables, para la variable v, su dominio, de acuerdo con el contexto planteado en el problema, son valores mayores o iguales a 30 km/h, mientras que la variable d, puede obtener valores mayores o iguales a 0, ¿por qué?

d) Las representaciones que se utilizaron en dicho problema fueron la expresión algebraica, la tabla de valores y una gráfica.

Para mostrar en forma explícita cómo abordar en diferentes áreas el cambio a través de su modelación con funciones, se presentan a continuación algunas aplicaciones en situaciones y fenómenos donde se caracteriza el cambio mediante funciones.

Campo de la física. El cambio de posición de un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba en función del tiempo se analiza desde el movimiento uniformemente acelerado, cuyo modelo matemático es:

$$\boldsymbol{h(t) = h_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2}$$

Donde:

$\boldsymbol{h(t)}$**:** altura en función del tiempo

$\boldsymbol{h_0}$**:** altura inicial

$\boldsymbol{v_0}$**:** velocidad inicial

$\boldsymbol{t}$**:** tiempo en segundos

$\boldsymbol{g}$**:** valor de la aceleración debida a la gravedad

Actividad formativa 3.1

1. Una pelota ha sido lanzada con una velocidad inicial de 64 pies/s desde la parte superior de un acantilado a 100 pies del suelo de un cañón. La aceleración debida a la gravedad es –32 pies/s^2.

   a) Encuentra el modelo del cambio de posición de la pelota con respecto al tiempo obteniendo su expresión algebraica, llenando la tabla de valores a partir de observar su representación gráfica, como se muestra en la siguiente página.

Primero establece lo siguiente:

$h_0 =$

$v_0 =$

$g =$

Expresión algebraica:

Gráfica:

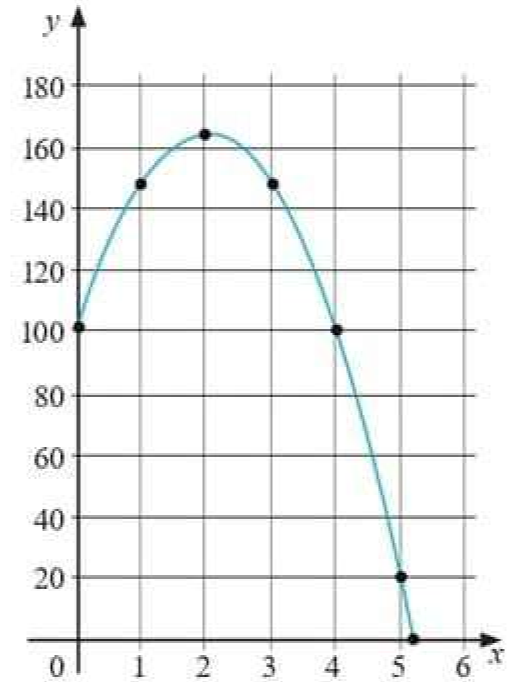


Tabla de valores:

Tiempo (s)	Altura $h(t)$ (pies)
0	100
1	
2	
3	
4	
5	

b) ¿En cuánto tiempo alcanzará su altura máxima la pelota?

c) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

d) ¿A los cuántos segundos llegará al suelo?

e) ¿Cuáles son las variables de la función?

f) ¿Cuáles son los valores (conjuntos numéricos) que pueden tomar las variables de la función?

Campo de la biología. La extinción o crecimiento de una población de bacterias, hongos o de crías domésticas y ganado; pueden ser modelados por funciones del tipo exponencial, es decir, funciones en las que la variable independiente se encuentra en el exponente de un número. Su forma general es:

$$f(x) = ba^x$$

donde $f(x)$: es la función de crecimiento

b: es el valor inicial

a: es el factor de cambio

x: es la variable independiente

Actividad formativa 3.2

1. En un cultivo hay inicialmente 500 bacterias y se duplica en tamaño cada hora. Si este crecimiento es exponencial, encuentra el modelo del cambio de población de bacterias con respecto al tiempo t en horas a través de su expresión algebraica, la tabla de valores y de su gráfica (apóyate en GeoGebra) e interprétalo respondiendo las interrogantes.

   a) Completa lo siguiente.

   Identifica:

   - La variable independiente:
   - $b =$
   - $a =$
   - Tipo de función:

Expresión algebraica:

Gráfica:

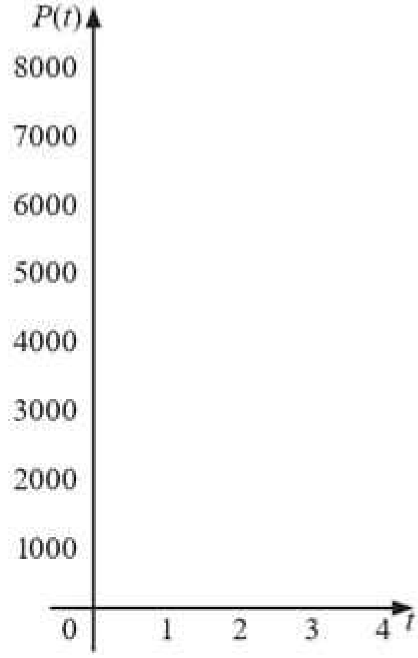


Tabla de valores:

Tiempo (t)	Población $P(t)$

b) A partir de los resultados obtenidos, responde:

i. ¿Cuáles son las variables de la función?

ii. ¿Cuáles son los valores (conjuntos numéricos) que pueden tomar las variables de la función?

iii. ¿En cuánto tiempo la población llegará a 4,000 bacterias?

iv. ¿En cuánto tiempo la población llegará a 8,000 bacterias?

v. ¿Cuántas bacterias habrá a las 10 horas?

Campo de la economía y administración. En economía y administración se conoce como ingreso, a la cantidad total de dinero que obtiene una empresa u organización, debido a la venta de sus productos o a la prestación de sus servicios. Lo anterior puede ser modelado por una función lineal y su forma general es:

$$I_T = px$$

Donde:

I_T: ingreso total

p: precio del producto o servicio

x: cantidad de productos vendidos o servicios brindados

Ejemplo formativo 3.1

1. Una empresa en la que se fabrican cargadores para teléfonos celulares vende a sus clientes mayoristas dichos cargadores a un costo de $150.00. Si para ser considerado como cliente mayorista necesitan hacer una compra de al menos 1,000 productos, ¿cuál será el ingreso menor que pudiera recibir el fabricante de un cliente mayoritario?

Resolución

Como la función $I_T = px$, se tiene:

- Variable independiente x: cantidad de cargadores
- Costo de cargador: $p = 150$

Entonces, $I_T = 150x$.

Si la cantidad de cargadores mínima a vender es 1,000 se tiene:

$$I_T = 150(1000)$$
$$I_T = 150000$$

Por lo tanto, el ingreso menor que puede recibir el fabricante de un cliente mayoritario es \$150,000.00.

Habrás podido observar en los ejemplos anteriores que se aborda una situación de cambio, como puede ser el crecimiento de una población, el movimiento de un cuerpo físico o un fenómeno económico haciendo una modelación con funciones.

Sin embargo, hay sucesos o fenómenos en los que es necesario trabajar con más de una función de variable real para analizarlos, para lo cual, como parte del proceso de modelación es necesario realizar operaciones con funciones.

Operaciones con funciones

Las funciones se pueden combinar en formas diferentes; una forma básica se refiere a sumar, sustraer, multiplicar y dividir funciones. Dadas dos funciones f y g de variable real, podemos considerar su suma, resta, multiplicación y división y formar nuevas funciones, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ y f/g, las que se definen por las siguientes reglas y condiciones sobre sus dominios.

Operación	Ejemplo
Suma: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ $D_{f+g}=D_f \cap D_g$	Sea $f(x)=2x+3$ y $g(x)=x^2+2x-1$ $(f+g)(x)=x^2+4x+2$
Resta: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ $D_{f-g}=D_f \cap D_g$	Sea $f(x)=2x+3$ y $g(x)=x^2+2x-1$ $(f-g)(x)=-x^2+4$
Multiplicación: $(f \cdot g)(x)=f(x) \cdot g(x)$ $D_{f g}=D_f \cap D_g$	Sea $f(x)=x$ y $g(x)=x+2$ $(f \cdot g)(x)=x^2+2x$
División: $(f/g)(x)=f(x)/g(x)$, $g(x) \neq 0$ $D_{f/g}=D_f \cap D_g-\{x \mid g(x)=0\}$	Sea $f(x)=x^2+2x$ y $g(x)=x$, $x \neq 0$ $(f/g)(x)=x+2$

Una operación particular con funciones tiene lugar cuando nos referimos a la composición de funciones, la que se representa esquemáticamente en la Figura 3.2. Sean f y g dos funciones cualesquiera tales que el rango de f se encuentra dentro del dominio de g; la composición de g y f es la función en la que a cada valor x del dominio de f se hace corresponder el valor $g[f(x)]$, se denota como $g \circ f$, es decir:

$$(g \circ f)(x)=g[f(x)]$$

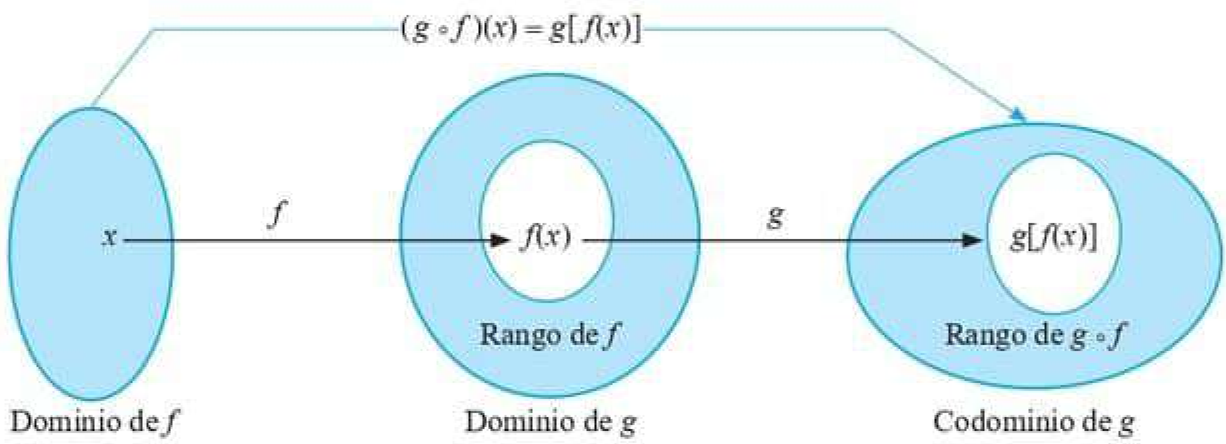


Figura 3.2. Esquema de la función compuesta.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2025).

De igual forma, si el rango de g se encuentra dentro del dominio de f la composición de f y g es la función dada por $f[g(x)]$, se denota como $f \circ g$ y se tiene:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

Si, por ejemplo $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 3$, se cumple $R_f = \Re_+ \subset \Re = Dg$, luego

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[x^2] = x^2 + 3$$

Ejemplo formativo 3.2

1. Dadas las funciones anteriores $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 3$:
   a) Determina $(f \circ g)(x)$

      Como $R_g = \Re \subset \Re = D_f$, entonces

      $$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[x + 3] = (x + 3)^2$$

   b) Calcula $(f \circ g)(2)$

      $$(f \circ g)(2) = f[g(2)] = f[2 + 3] = f(5) = (5)^2 = 25$$

   c) Calcula $(g \circ f)(2)$

      $$(g \circ f)(2) = g[f(2)] = g[2^2] = 2^2 + 3 = 7$$

Como habrás podido apreciar de los dos ejemplos anteriores la composición de funciones no cumple la propiedad conmutativa, es decir, en general

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

Actividad formativa 3.3

Realiza las siguientes operaciones con las funciones dadas.

1. Si $f(x) = 3x - 5$; $g(x) = x^2 - 3x - 10$ y $h(x) = x + 2$, calcula:
   a) $(f + g)(x)$
   b) $(g - f)(x)$
   c) $(g/h)(x)$, ¿para qué valores es posible esta operación?
   d) $(f \cdot h)(x)$
   e) $(f \circ h)(x)$
2. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x + 1$ calcula:
   a) $(f + g)(x)$
   b) $(f + g)(3)$
   c) $(g - f)(x)$
   d) $(g - f)(0)$
   e) $(f/g)(x)$, ¿para qué valores es posible esta operación?
   f) $(f/g)(1)$
3. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 5$ y $g(x) = x + 5$:
   a) Determina $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$
   b) Calcula $(f \circ g)(1)$ y $(g \circ f)(1)$

Como ya se ha mencionado, existen situaciones o sucesos cuyo cambio puede ser estudiado mediante una modelación en la que se realicen operaciones con funciones. Por ejemplo, la obtención de utilidades (ganancias) de una empresa se determina por la diferencia que existe entre la función de ingreso total (I_T) y la de costo total (C_T).

Por lo tanto, matemáticamente la utilidad (U) puede ser calculada por la expresión:

$$U(x) = I_T(x) - C_T(x)$$

A su vez, el costo total se obtiene a partir de la suma de la función de costo variable C_v y la de costo fijo (C_f), es decir: $C_T = C_v + C_f$.

Actividad formativa 3.3

1. Una empresa produce y vende un artículo a un precio de $150.00, si sus costos fijos mensuales son de $400,000.00 y sus gastos de mano de obra son de $20.00 por producto y por concepto de materia prima de $30.00 por producto, determina la utilidad mensual de la empresa si su producción y venta mensual es de 10,000 artículos.

   Resolución

   - **Primero.** Determina la función de ingreso total, que ya conoces, $I_T = px$, donde

     $p =$

     Luego, la función $I_T =$

   - **Segundo.** Determina la función de costo total C_T la cual se compone del costo variable y el costo fijo.

     El costo variable, es aquel que depende directamente del nivel de producción, por ejemplo, la materia prima y la mano de obra necesarios por la cantidad de productos o servicios brindados, para este caso: $C_v =$

     Por su parte, la función de costos fijos representa aquellos costos que no varían significativamente con los cambios en el nivel de producción, normalmente es una función constante, en este caso: $C_f =$

     Por lo tanto, si la función de costo total es $C_T = C_v + C_f$, resulta:

   - **Tercero.** Calcula la función de la utilidad $U(x) = I_T(x) - C_T(x)$.
   - **Cuarto.** Determina cual es la utilidad sustituyendo el valor de x.

EVALUACIÓN FORMATIVA 3.1

1. En una granja se quiere desarrollar la cría de un tipo de conejos y para ello se introducen 50 conejos. Conociendo que la tasa de natalidad mensual de ese tipo de conejos es del 5%, establece el modelo que explique el comportamiento de cambio de población de conejos al cabo de un tiempo t en meses dando su expresión algebraica, tabla de valores y su gráfica (apóyate en GeoGebra).

   a) Completa lo siguiente.

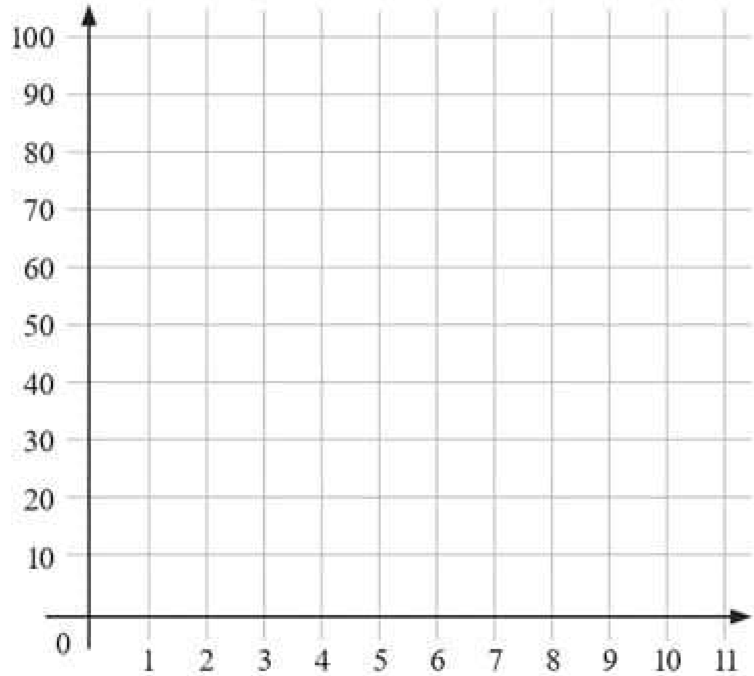
   Identifica:

   - $b =$
   - $a =$
   - Variable independiente:

Expresión algebraica:

Tabla de valores:

Gráfica:



b) Consultando los resultados obtenidos, responde:

   i. ¿Cuáles son las variables de la función?

   ii. ¿Cuáles son los valores (conjuntos numéricos) que pueden tomar las variables de la función?

   iii. ¿En cuánto tiempo la población llegará a 60 conejos aproximadamente?

   iv. ¿En cuánto tiempo la población llegará a 64 conejos aproximadamente?

   v. ¿Cuántos conejos habrá a los diez meses?

2. Un cultivo de bacterias cada cinco horas triplica su población. Si el número inicial de bacterias es 100, utilizando una función exponencial, determina:

   a) La expresión algebraica que representa el número de bacterias $B(t)$ en el tiempo t.

   b) ¿Cuál es el número de bacterias al cabo de 10 horas?

   c) ¿En cuántas horas el cultivo de bacterias se elevará a 10,000?

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ______________________ Plantel: ______________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 3. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Utilicé las funciones y las operaciones con funciones para modelar y resolver problemas de diferente índole. (M1-C3)			

Coevaluación para el aprendizaje

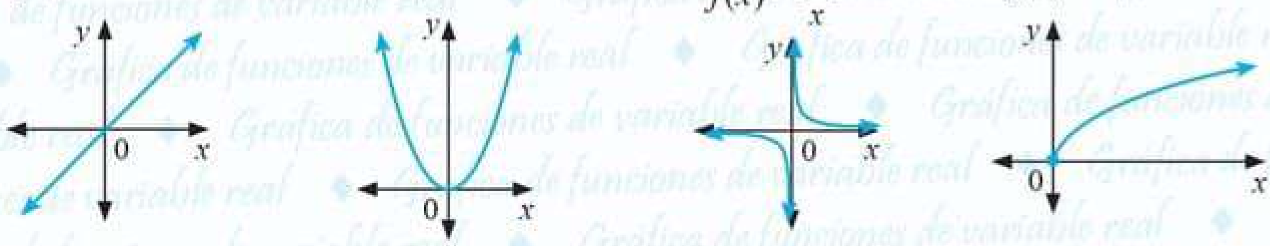
Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 3 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Utilizó las funciones y las operaciones con funciones para modelar y resolver problemas de diferente índole. (M1-C3)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Gráfica de funciones de variable real



$f(x) = x$	$f(x) = x^2$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \sqrt{x}$
$D_f = \Re$	$D_f = \Re$	$D_f = \{x \mid x \neq 0\}$	$D_f = \{x \mid x \geq 0\}$
$R_f = \Re$	$R_f = \{x \mid x \geq 0\}$	$R_f = \{x \mid x \neq 0\}$	$R_f = \{x \mid x \geq 0\}$

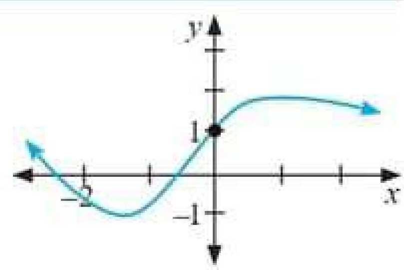
Progresión de aprendizaje 4

Analiza la gráfica de funciones de variable real buscando simetrías, y revisa conceptos como continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos, concavidades, entre otros, resaltando la importancia de éstos en la modelación y el estudio matemático.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 4.1

1. ¿Qué coordenada tiene el punto marcado en el gráfico de la derecha?



   a) (–1, 0)
   b) (0, –1)
   c) (0, 1)
   d) (1, 0)

2. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = x$?
   a) $[0, +\infty)$ b) $(-\infty, 0]$
   c) $(-\infty, +\infty)$ d) $(0, 1)$

3. ¿Cuál es el rango de la función $f(x) = x^2$?
   a) $[0, +\infty)$ b) $(-\infty, 0]$
   c) $(-\infty, +\infty)$ d) $(0, 1)$

María es la encargada de un invernadero que cultiva tomates. Para asegurar un crecimiento óptimo de las plantas, necesita monitorear y analizar la temperatura durante el día. Utilizando sensores, ha registrado la temperatura durante 24 horas y ha generado una gráfica que muestra la temperatura (en °C) en función del tiempo (en horas, desde las 00:00).

La gráfica de la Figura 4.1 muestra el comportamiento de la temperatura a lo largo del día.

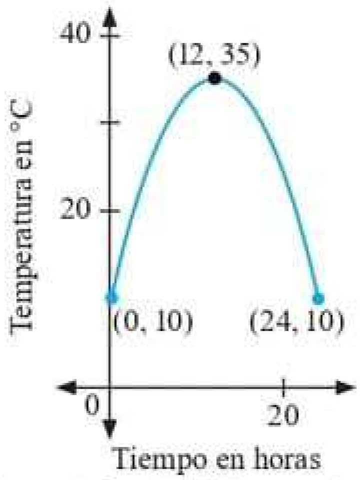


Figura 4.1. Comportamiento de la temperatura del invernadero de 0 a 24 horas.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Analizando el comportamiento de la gráfica de la Figura 4.1, observa que presenta las siguientes características.

Dominio	El tiempo varía de las 00:00 a las 24:00 horas.
Rango	La temperatura varía entre los 10 °C y 35 °C.
Continuidad	La función es continua porque la temperatura cambia gradualmente sin cambios instantáneos abruptos (el sensor no falla, ni se abre una puerta repentinamente, es decir, no presenta huecos ni saltos).
Monotonía	Creciente de 0:00 a 12:00 (madrugada y salida del sol). Decreciente de 12:00 a 24:00 (tarde y noche).
Puntos críticos	Temperatura máxima de 35°C a las 12:00. Temperatura mínima de 10°C a las 00:00 y a las 24:00.
Concavidad	La temperatura aumenta hasta llegar a un valor máximo y luego empieza a disminuir formando una parábola, por lo que presenta una concavidad hacia abajo.

Funciones numéricas

Las funciones numéricas son herramientas matemáticas para describir, analizar y predecir relaciones entre cantidades que cambian. Por ejemplo, una máquina mágica que transforma números: introduces un número por un lado y sale otro número por el otro lado, siguiendo siempre una regla específica. ¡Eso es esencialmente una función numérica!

Definiciones de función

1. Una **función** f de un conjunto A a un conjunto B es una relación o regla de correspondencia que a cada elemento $x \in A$ le asigna un único elemento $y = f(x) \in B$.
2. Una **función** es un conjunto de pares ordenados de números (x, y) en el que no existen dos o más pares ordenados con el mismo valor de x y diferentes valores de y.
3. Una **función** es una relación entre dos variables (x, y) de tal manera que a x (la variable independiente), le corresponde uno y solo uno de los valores de y (la variable dependiente).

Las funciones numéricas se clasifican en algebraicas y trascendentes.

- Funciones
  - Algebraicas
    - Polinomiales — Ejemplos: $f(x) = 5x$, $f(x) = 3x^2 - x + 5$
    - Racionales — Ejemplos: $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$
    - Irracionales — Ejemplos: $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3}$
  - Trascendentes
    - Logarítmicas — Ejemplos: $f(x) = \log_{10} x$, $f(x) = \ln x$
    - Exponenciales — Ejemplos: $f(x) = 2^x$, $f(x) = e^x$
    - Trigonométricas — Ejemplos: $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = \cos x$

La gráfica de una función es la representación visual de la relación entre dos conjuntos de valores: el conjunto de entrada (generalmente representado en el eje horizontal o eje x) y el conjunto de salida (representado en el eje vertical o eje y). Cada punto en esta gráfica corresponde a un par ordenado (x, y), donde x es un valor del dominio de la función y $y = f(x)$ es el valor de la imagen correspondiente al rango de la función (Figura 4.2).

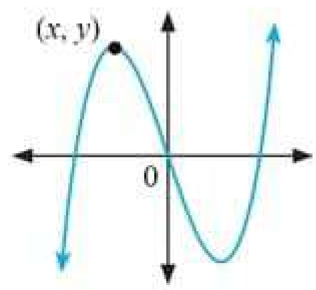


Figura 4.2. Gráfica de una función $y = f(x)$.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

La gráfica permite observar de forma intuitiva el comportamiento de la función, a través del estudio de sus características o propiedades.

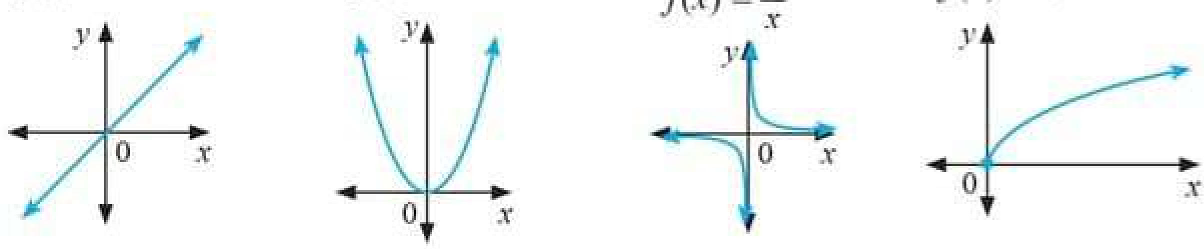
Características y comportamiento de las funciones

En esta progresión de aprendizaje, se estudian las características y el comportamiento de las funciones algebraicas. Dichas características son el dominio, el rango, la continuidad, la monotonía, los extremos relativos, la concavidad, el punto de inflexión, la paridad, la simetría y las asíntotas.

El **dominio** de una función f que se representa como D_f, es el mayor subconjunto del conjunto de números reales para los que $f(x)$ es un número real (Figura 4.3).

El **rango** de una función f que se representa como R_f, es el subconjunto de números reales que resulta de evaluar $f(x)$ para cada número real de su dominio (Figura 4.3).

$f(x) = x$ | $f(x) = x^2$ | $f(x) = \frac{1}{x}$ | $f(x) = \sqrt{x}$

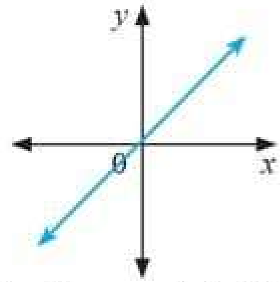


$D_f = \Re$	$D_f = \Re$	$D_f = \{x \mid x \neq 0\}$	$D_f = \{x \mid x \geq 0\}$
$R_f = \Re$	$R_f = \{x \mid x \geq 0\}$	$R_f = \{x \mid x \neq 0\}$	$R_f = \{x \mid x \geq 0\}$

Figura 4.3. Dominio y rango de una función.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

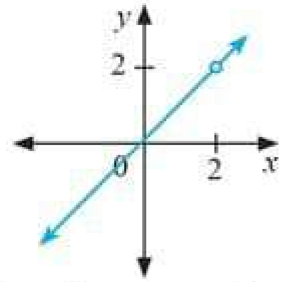
La manera más intuitiva de entender la **continuidad de una función** es pensar en dibujar su gráfica. Una función es continua si puedes dibujar su gráfica **sin levantar el lápiz del papel.** La representación gráfica de esta función es una curva continua, sin saltos ni cambios bruscos. Si tienes que levantar el lápiz haz encontrado una discontinuidad (Figura 4.4).

$f(x) = x$



Continua en todo $\Re$.

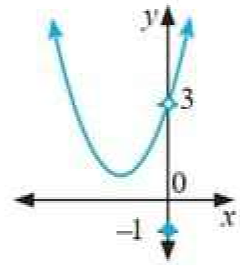
$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, x \neq 2$



Discontinua en $x = 2$.

Discontinidad (hueco).

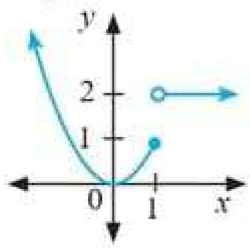
$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x = 1)^3 - 1}{x}, & x \neq 0 \\ -1, & x \neq 0 \end{cases}$



Discontinua en $x = 0$.

Discontinidad con un punto desplazado.

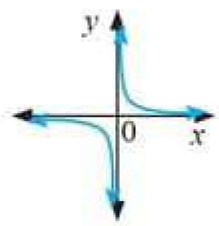
$f(x) = \begin{cases} x^2, x \leq 1 \\ 2, x > 1 \end{cases}$



Discontinua en $x = 1$

Discontinuidad de salto finito.

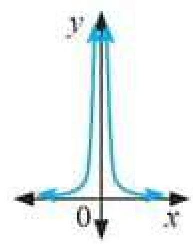
$f(x) = \dfrac{1}{x}$



Discontinua en $x = 0$

Discontinuidad de salto infinito.

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$



Discontinua en $x = 0$

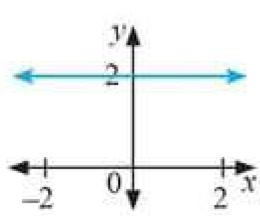
Discontinuidad de salto infinito.

Figura 4.4. Continuidad de una función.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

La **monotonía de una función** describe cómo "crece" o "decrece" una función a medida que avanzamos de izquierda a derecha en su gráfica (Figura 4.5):

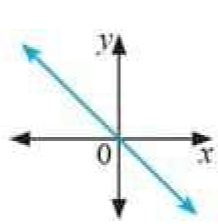
- **Función creciente.** A medida que x aumenta, $f(x)$ también aumenta, es decir, si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$.
- **Función decreciente.** A medida que x aumenta, $f(x)$ disminuye, es decir, si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$.
- **Función constante.** La función $f(x)$ no cambia, aunque x aumente o disminuya, es decir, $f(x_1) = f(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in \Re$.

$f(x) = 2$



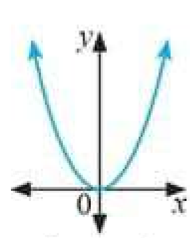
Constante: $(-\infty, +\infty)$

$f(x) = -x$



Decreciente: $(-\infty, +\infty)$

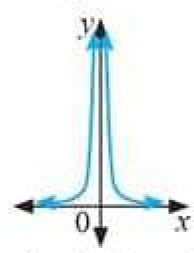
$f(x) = x^2$



Decreciente: $(-\infty, 0)$

Creciente: $(0, +\infty)$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$



Creciente: $(-\infty, 0)$

Decreciente: $(0, +\infty)$

$f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad f(x) = \ln x$ $\qquad f(x) = e^x$ $\qquad f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x \leq 0 \\ 1, & 0 < x < 3 \\ (x-3)^3 + 1, & x \geq 3 \end{cases}$

Creciente: $(0, +\infty)$ | Creciente: $(0, +\infty)$ | Creciente: $(-\infty, +\infty)$ | Creciente: $(-\infty, 0)$; Constante: $(0, 3)$; Creciente: $(3, +\infty)$

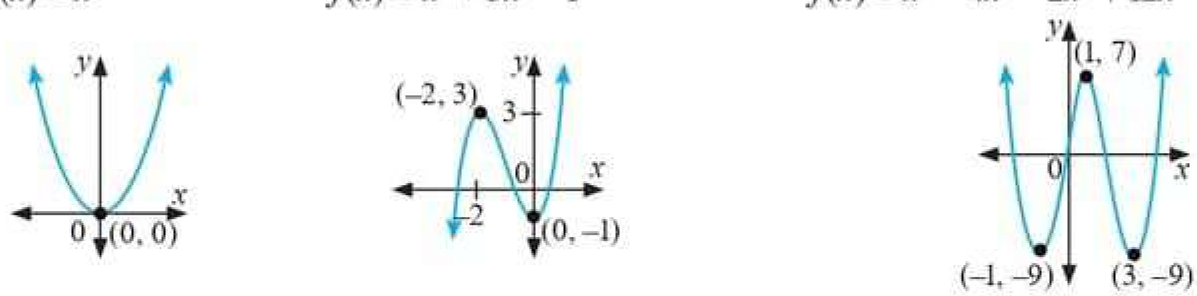
Figura 4.5. Monotonía de una función.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Un **extremo relativo (o local) de una función,** es el valor donde la función alcanza un valor "más alto" o "más bajo" que los puntos cercanos a él en un intervalo. Es como encontrar las "cimas" y los "valles" en la gráfica de una función (Figura 4.6):

- **Máximo relativo (o local).** Es el valor de la ordenada del punto (x, y) en el que la gráfica cambia de dirección de creciente a decreciente, formando lo que se conoce como "cima".
- **Mínimo relativo (o local).** Es el valor de la ordenada del punto (x, y) en el que la gráfica cambia de dirección de decreciente a creciente, formando lo que se conoce como "valle".

Toma en cuenta que el **máximo absoluto** de una función es el mayor valor que toma la función en todo su dominio y el **mínimo absoluto** de una función es el menor valor que toma la función en todo su dominio.

$f(x) = x^2$ $\qquad f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ $\qquad f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$



En $x = 0$ se localiza el valor mínimo absoluto $f(0) = 0$.

En $x = -2$ se localiza el valor máximo relativo $f(-2) = 3$.

En $x = 0$ se localiza el valor mínimo relativo en $f(0) = -1$.

En $x = -1$ se localiza el valor mínimo absoluto $f(-1) = -9$.

En $x = 1$ se localiza el valor máximo relativo $f(1) = 7$.

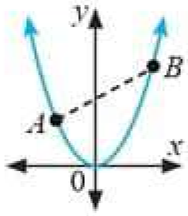
En $x = 3$ se localiza el valor mínimo absoluto $f(3) = -9$.

Figura 4.6. Máximo y mínimo relativo de una función.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

La **concavidad de una función,** describe la forma en que se "curva" la gráfica, es decir, cómo se "dobla" la curva (Figura 4.7):

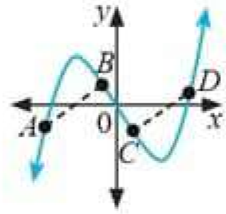
- **Cóncava hacia arriba** (⋃). Si dados dos puntos cualesquiera (A y B) de su gráfica, el segmento de recta que los une queda por encima de la curva de la función.
- **Cóncava hacia abajo** (⋂). Si dados dos puntos cualesquiera (A y B) de su gráfica, el segmento de recta que los une queda por abajo de la curva de la función.

$f(x) = x^2$



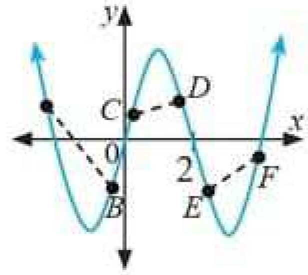
El segmento de recta *AB* queda por encima de la curva. La función es concava hacia arriba.

$f(x) = x^3 - 3x$



El segmento de recta *AB* queda por abajo de la curva, la función es concava hacia abajo en $(-\infty, 0)$. El segmento de recta *CD* queda por arriba de la curva, la función es concava hacia arriba en $(0, +\infty)$.

$f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

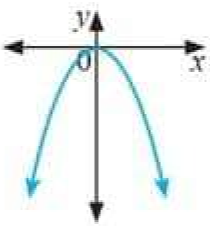


Cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$, cóncava hacia abajo en $(0, 2)$ y cóncava hacia arriba en $(2, +\infty)$.

Figura 4.7. Concavidad de una función.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

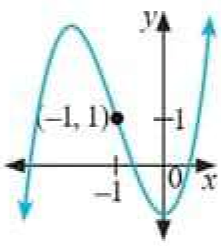
Un **punto de inflexión de una función,** es un punto donde la función cambia la forma en que se curva, es decir, donde cambia de ser **cóncava hacia arriba** a ser **cóncava hacia abajo,** o viceversa (Figura 4.8).

$f(x) = -x^2$



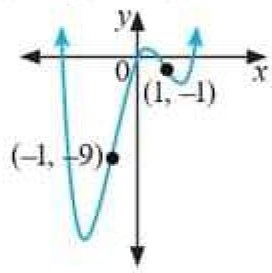
La función no cambia de concavidad por lo que no tiene punto de inflexión.

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$



La función cambia de concavidad en $(-1, 1)$, por lo que es un punto de inflexión.

$f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x$



La función presenta dos cambios de concavidad, por lo que los puntos de inflexión son $(-1, -9)$ y $(1, -1)$.

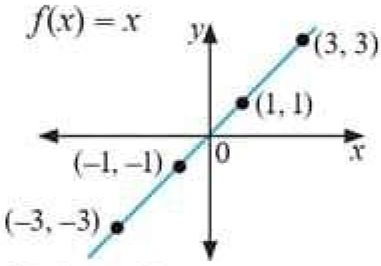
Figura 4.8. Punto de inflexión de una función.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

En las curvas donde se presenten puntos de inflexión, los puntos extremos del segmento de recta para evaluar su concavidad, deben considerarse que estén ambos, antes o después, del punto de inflexión.

La **paridad de una función** se refiere a su comportamiento cuando reemplazamos x por $-x$ (Figura 4.9):

- **Función impar.** Si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in D_f$.
- **Función par.** Si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in D_f$.

$f(x) = x$

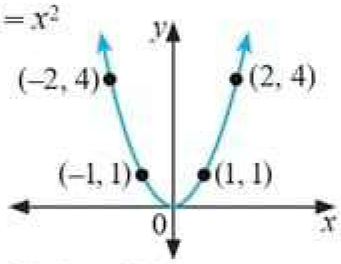


$f(-1) = -f(1) = -1$

$f(-3) = -f(3) = -3$

Función impar

$f(x) = x^2$



$f(-1) = f(1) = 1$

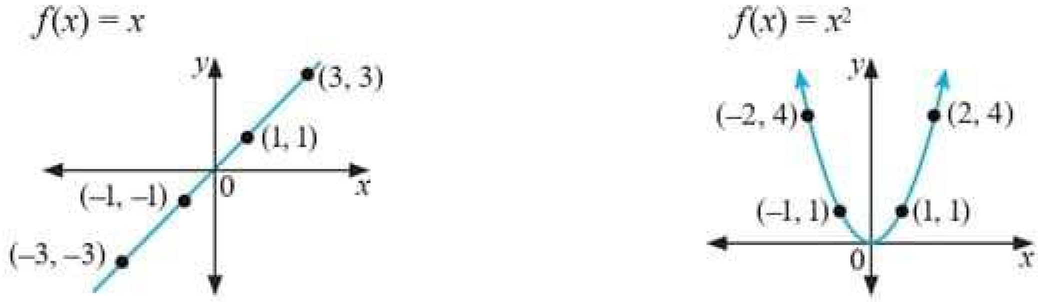
$f(-2) = f(2) = 4$

Función par

Figura 4.9. Paridad de una función.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

La **simetría de una función** es la propiedad que describe cómo se refleja la gráfica de una función respecto a un eje o un punto (Figura 4.10):

- **Es simétrica respecto al eje y** si la función es par. Para cada punto (x, y) en la gráfica hay un punto $(-x, y)$.
- **Es simétrica respecto al origen** si la función es impar. Para cada punto (x, y) en la gráfica hay un punto $(-x, -y)$.

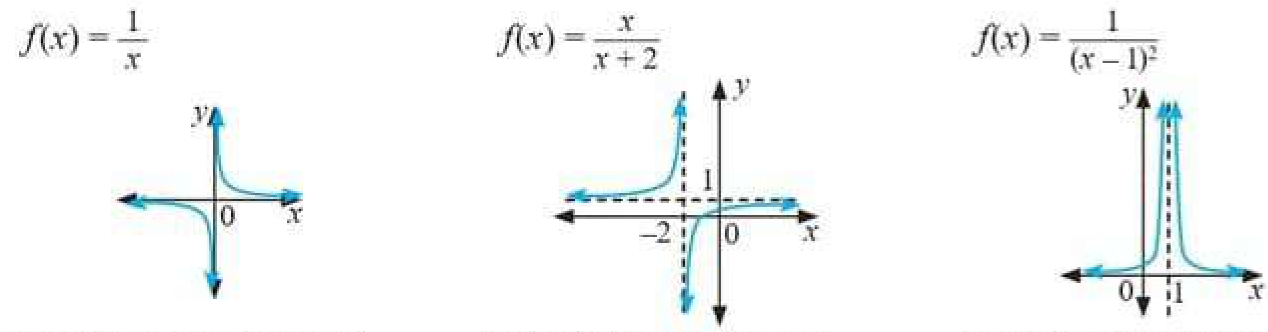


Simétrica con respecto al origen. Simétrica con respecto al eje de las ordenadas.

Figura 4.10. Simetría de una función.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Una **asíntota** es una línea recta a la cual se aproxima la curva de una función cuando el valor de $x \to -\infty$ o $x \to +\infty$, o cuando la función $f(x) \to -\infty$ o $f(x) \to +\infty$ en la medida que x se aproxima a c, donde c es un número real (Figura 4.11):

- **Asíntota horizontal.** Es una recta horizontal de la forma $y = k$ a la cual se acerca la curva de la función $f(x)$ cuando $x \to -\infty$ o $x \to +\infty$, donde k es un número real.
- **Asíntota vertical.** Es una recta vertical de la forma $x = c$ a la cual se aproxima la curva de la función $f(x)$, cuando $f(x) \to -\infty$ o $f(x) \to +\infty$ cerca de $x = c$, donde c es un número real.



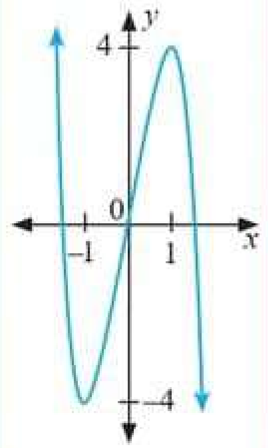
Asíntota horizontal $y = 0$. Asíntota horizontal $y = 1$. Asíntota horizontal $y = 0$.
Asíntota vertical $x = 0$. Asíntota vertical $x = -2$. Asíntota vertical $x = 1$.

Figura 4.11. Asíntotas de una función.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Ejemplo formativo 4.1

1. Analiza la función $f(x) = -x^5 + 5x$ a partir de su representación gráfica de la Figura 4.12 y obtén sus características principales.

Resolución



Dominio	f no tiene indeterminaciones del tipo raíces de números negativos o denominador cero, por lo que, $D_f = \Re$.
Rango	La función f cubre todos los valores reales debido a su tendencia hacia $\pm\infty$.
Continua	Es continua porque se puede dibujar sin despegar el lápiz del papel.
Creciente	Es creciente en $(-1, 1)$.
Decreciente	Es decreciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty,)$.
Máximo relativo	En $x = 1$ tiene el valor máximo relativo $f(1) = 4$.
Mínimo relativo	En $x = -1$ tiene el valor mínimo relativo $f(-1) = -4$.
Concavidad	Es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$. Es cóncava hacia abajo en $(0, +\infty)$.
Punto de inflexión	$(0, 0)$.
Paridad	La función es impar, porque $f(-x) = -f(x) = x^5 - 5x$.
Simetría	Es simétrica con respecto al origen porque para cada punto (x, y) en la gráfica hay un punto $(-x, -y)$.

Figura 4.12. Características de la función $f(x) = -x^5 + 5x$.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Función lineal

Una **función lineal** es una función numérica de primer grado, cuya gráfica es una línea recta no horizontal (la función constante es una línea recta horizontal) y tiene la forma $f(x) = mx + b$, donde m es la pendiente de la recta (si $m < 0$ la función es decreciente, si $m > 0$ la función es creciente y si $m = 0$ la función es constante) y b la ordenada en el origen.

Actividad formativa 4.1

1. A partir de las representaciones gráficas de la Figura 4.13, completa la siguiente tabla.

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = -x$ c) $g(x) = \frac{x}{2} + 1$ d) $h(x) = -3x + 1$

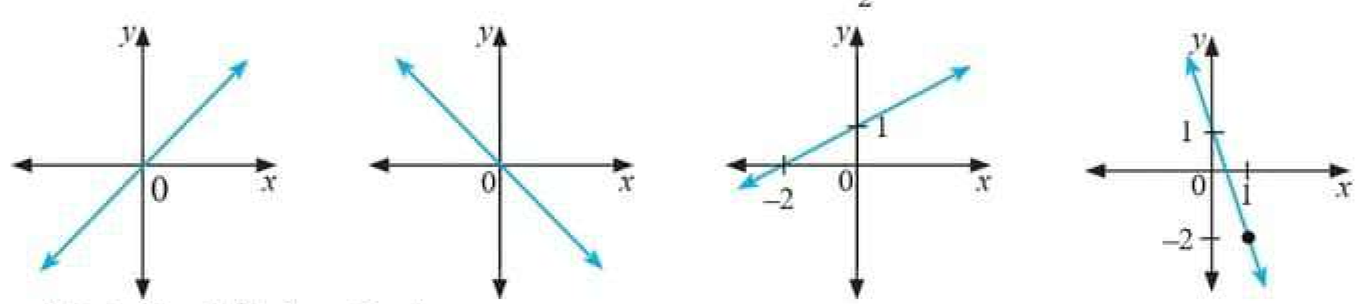


Figura 4.13. Gráficas de funciones lineales.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Gráfica	Dominio	Rango	Creciente o decreciente	Continua o discontinua	Par o impar	Simétrica
a)						
b)	$\Re$	$\Re$	Decreciente en todo $\Re$	Continua	Impar	Respecto al origen
c)						
d)						

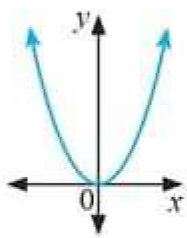
Función cuadrática

Una **función cuadrática** es una función numérica de segundo grado, cuya gráfica es una parábola vertical y tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b, c son números reales, con $a \neq 0$. Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba y si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo.

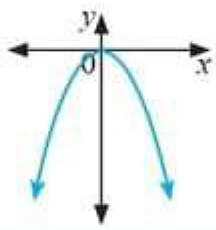
Actividad formativa 4.2

1. A partir de las siguientes representaciones gráficas, completa la siguiente tabla.

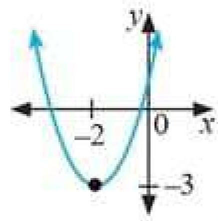
a) $f(x) = x^2$



b) $f(x) = -x^2$



c) $g(x) = x^2 + 4x + 1$



	Gráfica a)	Gráfica b)	Gráfica c)
Dominio			
Rango			
Continuidad			
Creciente			
Decreciente			
Máximo			
Mínimo			
Concavidad			
Punto de inflexión			
Paridad			
Simetría			

Función polinomial

Una **función polinomial** es una función numérica de grado n que consiste en la suma de términos que contienen variables elevadas a exponentes no negativos, multiplicadas por coeficientes. Su forma es

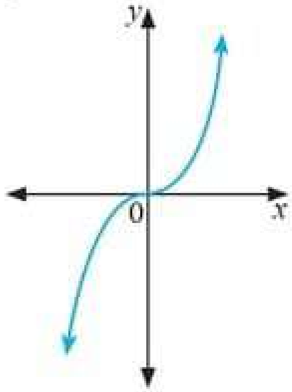
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Donde n es un número entero no negativo y $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ son números reales (coeficientes) con $a_n \neq 0$.

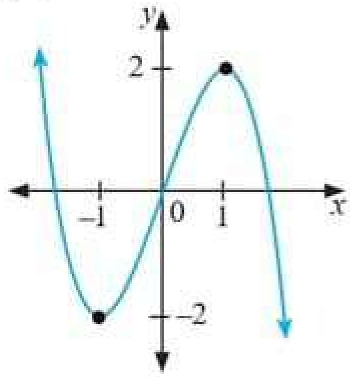
Actividad formativa 4.3

1. A partir de las siguientes representaciones gráficas, completa la siguiente tabla.

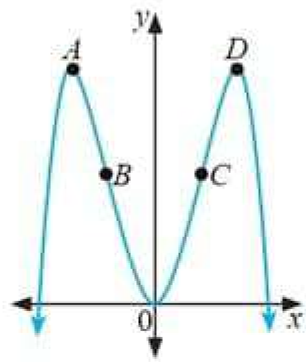
a) $f(x) = x^3$



b) $g(x) = -x^3 + 3x$



c) $h(x) = -x^4 + 4x^2$



$A(-\sqrt{2}, 4)$, $B\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{20}{9}\right)$, $C\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{20}{9}\right)$ y $D(\sqrt{2}, 4)$.

	Gráfica a)	Gráfica b)	Gráfica c)
Dominio			
Rango			
Continuidad			
Creciente			
Decreciente			
Máximo			
Mínimo			
Concavidad			
Punto de inflexión			
Paridad			
Simetría			

Función racional

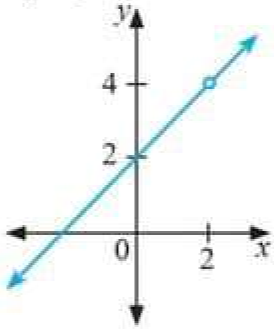
Una **función racional** es el cociente de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, donde $Q(x) \neq 0$. Se expresa matemáticamente como:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

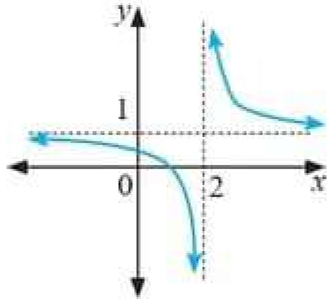
Actividad formativa 4.4

1. A partir de las siguientes representaciones gráficas, completa la siguiente tabla.

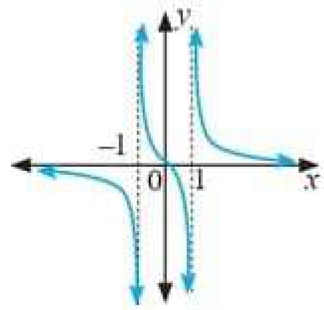
a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$



b) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x - 2}$



c) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$



	Gráfica a)	Gráfica b)	Gráfica c)
Dominio			
Rango			
Continuidad			
Creciente			
Decreciente			
Máximo			
Mínimo			
Concavidad			
Punto de inflexión			
Paridad			
Simetría			
Asíntota vertical			
Asíntota horizontal			

Función irracional

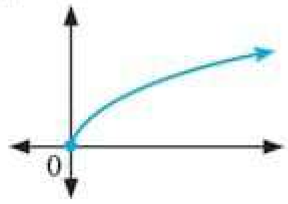
Una **función irracional** es una función numérica que contiene un radical donde la variable aparece dentro de la raíz, generalmente una raíz cuadrada, cúbica u otra raíz de índice entero. La forma general de una función irracional es:

$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$, donde $g(x)$ es una expresión algebraica y n es el índice de la raíz.

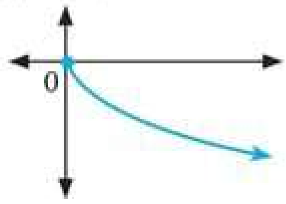
Actividad formativa 4.5

1. A partir de las siguientes representaciones gráficas, completa la siguiente tabla.

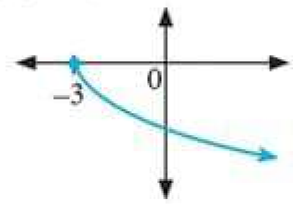
a) $f(x) = \sqrt{x}$



b) $f(x) = -\sqrt{x}$



c) $f(x) = -\sqrt{x + 3}$



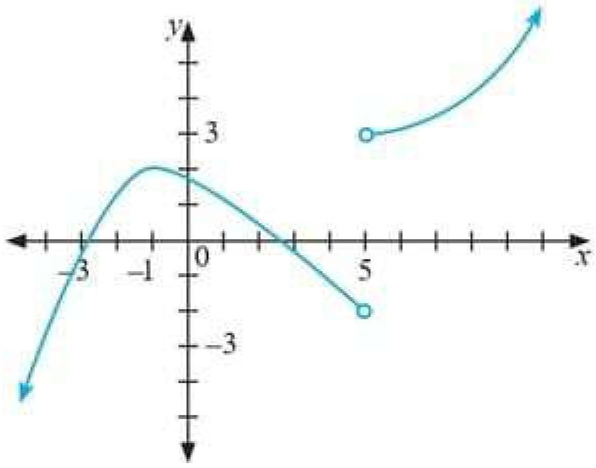
	Gráfica a)	Gráfica b)	Gráfica c)
Dominio			
Rango			
Continuidad			
Creciente			
Decreciente			
Máximo			
Mínimo			
Concavidad			
Punto de inflexión			
Paridad			
Simetría			
Asíntota vertical			
Asíntota horizontal			

EVALUACIÓN FORMATIVA 4.1

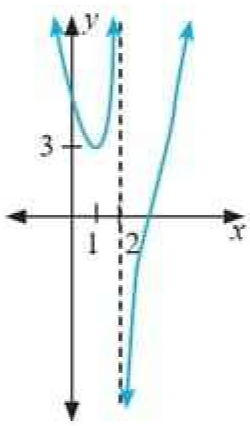
1. Esboza la representación gráfica de una función $g(x)$ que satisfaga lo siguiente:
   - Dominio: $x \in \Re - \{0, 3\}$.
   - Rango: $g(x) \in (1, +\infty)$.
   - $g(5) = 2$
   - Presenta una discontinuidad en $x = 0$.
   - Decreciente en el intervalo $x \in (-\infty, 0)$.
   - Creciente en el intervalo $x \in (0, 3)$.
   - Decreciente en el intervalo $x \in (3, +\infty)$.
   - La función es cóncava hacia abajo en $x \in (-\infty, 0)$, cóncava hacia arriba en $x \in (0, 3)$ y cóncava hacia arriba en $x \in (3, +\infty)$.
   - Asíntota vertical en $x = 3$.
   - Asíntota horizontal en $y = 1$.

2. Obtén las características principales de las siguientes representaciones gráficas.

a)



b)



AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ______________________________ Plantel: ______________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 4. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Obtuve las características de una función a partir de su representación gráfica y viceversa. (M1-C2)			

Coevaluación para el aprendizaje

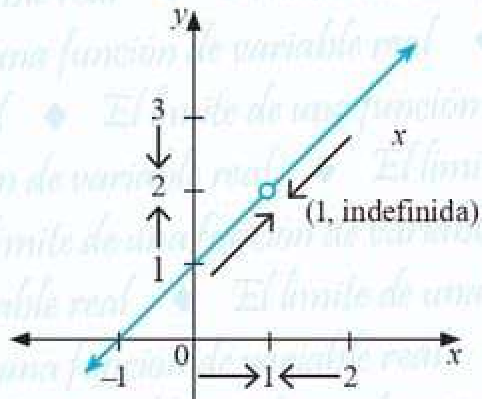
Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 4 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Obtuvo las características de una función a partir de su representación gráfica y viceversa. (M1-C2)			

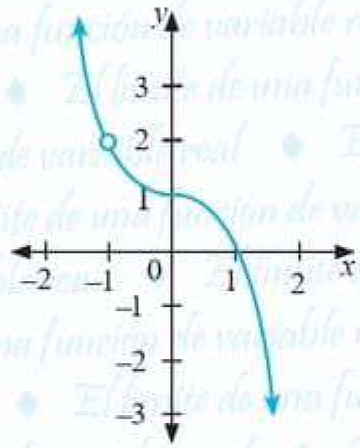
____

Nombre y firma de quien coevalúa

El límite de una función de variable real



$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=?$$



$$\lim_{x\to -1} g(x)=?$$

Progresión de aprendizaje 5

Conceptualiza el límite de una función de variable real como una herramienta matemática que permite comprender el comportamiento local de la gráfica de una función.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M2-C2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación.	A			
	C			
	H			
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 5.1

1. Dada la función $h(x) = x^2 - 2x + 1$, ¿cuál es el valor de $h(3)$?

   a) 2 b) 4

   c) 7 d) 9

2. ¿Cuál es la factorización de $x^2 - 16$?

   a) $(x-4)(x-4)$ b) $(x+8)(x-2)$

   c) $(x+4)(x-4)$ d) $(x+16)(x-1)$

Acabas de adquirir un celular y estás aprendiendo a usar su cámara. Un día, mientras fotografías un pájaro posado en un árbol lejano, te das cuenta que cada vez que aumentas el zoom (medido en aumentos X), puedes ver el pájaro más cerca. Registras qué tan clara se ve la imagen en una escala del 0 al 10, donde:

- 0 significa que no se distingue el pájaro.
- 10 significa que se ve perfectamente cada detalle.

Zoom: x	1X	2X	3X	4X	5X	6X	7X	8X	9X	10X	11X
Claridad de la imagen: $f(x)$	2.0	4.5	6.0	7.0	7.8	8.4	9.1	9.3	9.7	9.9	

Observaciones:

- Cuando aumentas el zoom, la claridad de la imagen mejora.
- Sin embargo, nota que cada vez es más difícil conseguir mejoras significativas. Por más que aumentes el zoom, parece imposible llegar exactamente a 10 de claridad. La cámara tiene un límite físico de 10X de zoom.

Esta situación ilustra perfectamente el concepto de límite, es decir, la claridad de la imagen se aproxima cada vez más a 10, al aproximarte a un zoom de 11X. En notación de límites, esto se expresa como $\lim_{x \to 11X} f(x) = 10$.

Cálculo de límites por métodos gráficos y numéricos

El desarrollo del concepto de límite surgió de la necesidad de dar respuesta a problemas fundamentales que los matemáticos enfrentaban desde la antigua Grecia. Paradojas como las de Zenón (código QR 5.1) y problemas como el cálculo del área del círculo por medio de polígonos regulares inscritos y el problema de la recta tangente requirieron siglos de evolución hasta que matemáticos como Newton y Leibniz formalizaron estas ideas en lo que hoy conocemos como cálculo infinitesimal.

Código QR 5.1. Paradoja de Zenon. TEDEd Sé Curioso. (Parzibyte, 2025).

Un límite es cómo "encontrar" a que número se acerca una función cuando x se aproxima a cierto valor. Es similar a cuando te acercas cada vez más a un punto sin llegar a tocarlo.

Por ejemplo, para la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$,

$$f(0) = \frac{0^2 - 1}{0 - 1} = \frac{0 - 1}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1 \text{ y } f(2) = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} = \frac{4 - 1}{1} = \frac{3}{1} = 3$$

Ahora, ¿cómo se comporta la función en $x = 1$?

$$f(1) = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

Obtuvimos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, por lo que no sabemos cómo se comporta la función en $x = 1$, dado que no está definida en dicho valor. A continuación, vamos a explorar su comportamiento por medio de métodos numéricos aproximándonos por la izquierda y por la derecha para valores próximos a $x = 1$.

Aproximación por la izquierda → ← Aproximación por la derecha

x	0	0.3	0.6	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.4	1.7	2
$f(x)$	1	1.3	1.6	1.9	1.99	1.999		2.001	2.01	2.1	2.4	2.7	3

Observa que en $x = 1$ la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ se aproxima a 2.

Ahora veamos cómo se comporta la función en $x = 1$ en su representación gráfica en la Figura 5.1.

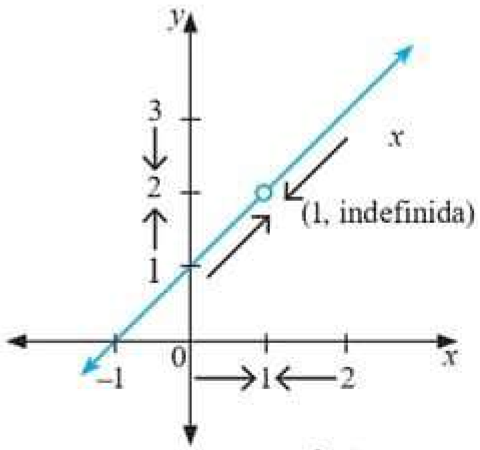


Figura 5.1. Gráfica de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2025).

En la medida que te aproximas por la izquierda y por la derecha a $x = 1$, la función $f(x)$ se aproxima a 2. Por lo que $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

El límite toma importancia en los valores de x donde no sabemos cómo se comporta la función $f(x)$.

Con este antecedente, damos una definición intuitiva de límite.

Noción intuitiva de límite

Si $f(x)$ se hace arbitrariamente próximo al número L al tomar x suficientemente cerca de c, pero diferente a este, tanto por la izquierda como por la derecha de c, entonces el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c es L.

Su notación es: $\lim_{x \to c} f(x) = L$

Se lee "$f(x)$ se aproxima a L cuando x se aproxima a c".

Actividad formativa 5.1

1. Calcula los siguientes límites (si existen) usando aproximaciones por la izquierda y por la derecha.

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$

x	0	0.4	0.7	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.2	1.6	2
$f(x)$													

El $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} =$ ______.

b) $\lim_{x \to 2} \frac{x}{x^2 - 4}$

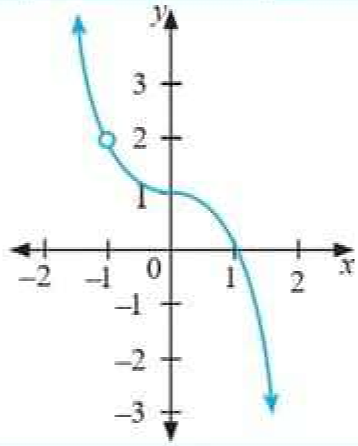
x						2					
$f(x)$											

¿A qué conclusión llegas sobre el $\lim_{x \to 2} \frac{x}{x^2 - 4}$?

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 9}$

x						0					
$f(x)$											

¿A qué conclusión llegas sobre el $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 9}$?



2. Observa en la figura de la derecha la gráfica de g y responde lo siguiente:
   a) ¿Cuál es el valor de $g(-1)$?
   b) ¿Cuál es el $\lim_{x \to -1} g(x)$?
   c) ¿El $\lim_{x \to -1} g(x) = g(-1)$?

Cálculo analítico de límites

Para calcular límites por métodos analíticos se requiere de la aplicación de las siguientes propiedades del límite.

Propiedades de los límites

Sean n un entero positivo, k una constante real y f y g funciones que tengan límite en el número real c, entonces:

1. $\lim_{x \to c} k = k$;
2. $\lim_{x \to c} x = c$;
3. $\lim_{x \to c} kf(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$;
4. $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \pm \lim_{x \to c} g(x)$;
5. $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$;
6. $\lim_{x \to c} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$, siempre que $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$;
7. $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^n$;
8. $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$, siempre que $\lim_{x \to c} f(x) > 0$ cuando n sea par.

Ejemplo formativo 5.1

1. Determina el límite $\lim_{x \to 4} 3$.

Resolución

$\lim_{x \to 4} 3 = 3$, por la propiedad 1

2. Determina el límite $\lim_{x \to 0} 2x$.

Resolución

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} 2x &= 2 \lim_{x \to 0} x, \text{ por la propiedad 3} \\ &= 2(0), \text{ por la propiedad 2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. Calcula el límite de $\lim_{x \to -2}(x^2 - 3x + 1)$.

Resolución

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -2}(x^2 - 3x + 1) &= \lim_{x \to -2} x^2 - \lim_{x \to -2} 3x + \lim_{x \to -2} 1, \text{ por la propiedad 4}\\ &= \left(\lim_{x \to -2} x\right)^2 - 3\lim_{x \to -2} x + \lim_{x \to -2} 1, \text{ por las propiedades 3 y 7}\\ &= (-2)^2 - 3(-2) + 1, \text{ por las propiedades 1 y 2}\\ &= 4 + 6 + 1\\ &= 11\end{aligned}$$

4. Calcula el límite de $\lim_{x \to 3}\frac{x-4}{x-2}$.

Resolución

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 3}\frac{x-4}{x-2} &= \frac{\lim_{x \to 3}(x-4)}{\lim_{x \to 3}(x-2)}, \text{ por la propiedad 6}\\ &= \frac{\lim_{x \to 3} x - \lim_{x \to 3} 4}{\lim_{x \to 3} x - \lim_{x \to 3} 2}, \text{ por la propiedad 4}\\ &= \frac{3-4}{3-2}, \text{ por las propiedades 1 y 2}\\ &= -\frac{1}{1}\\ &= -1\end{aligned}$$

Actividad formativa 5.2

1. Determina los siguientes límites usando las propiedades de los límites.

a) $\lim_{x \to -3} 7$ b) $\lim_{x \to 1/5} 5x$ c) $\lim_{x \to 4}(-x^2 + 4x - 2)$

d) $\lim_{x \to 1}(2x)(x+3)$ e) $\lim_{x \to -1}\frac{3x+2}{x-1}$ f) $\lim_{x \to 11}\sqrt[3]{x-3}$

Cálculo de límites por factorización

Hay límites de funciones que no es posible calcular por sustitución directa, por ejemplo $\lim_{x \to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$.

$$\lim_{x \to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\lim_{x \to 1}(x^2-1)}{\lim_{x \to 1}(x-1)} = \frac{\lim_{x \to 1} x^2 - \lim_{x \to 1} 1}{\lim_{x \to 1} x - \lim_{x \to 1} 1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

Llegamos a la indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Para saber si el límite existe, puedes usar la factorización para cancelar los factores que son cero, como se muestra a continuación.

Ejemplo formativo 5.2

1. Calcula los siguientes límites por factorización.

a) $\lim_{x \to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

Resolución

$$\lim_{x \to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \to 1}(x+1) = \lim_{x \to 1} x + \lim_{x \to 1} 1 = 1 + 1 = 2$$

b) $\lim_{x \to -3}\frac{x^2+5x+6}{x+3}$

Resolución

$$\lim_{x \to -3}\frac{x^2+5x+6}{x+3} = \lim_{x \to -3}\frac{\cancel{(x+3)}(x+2)}{\cancel{x+3}} = \lim_{x \to -3}(x+2) = \lim_{x \to -3} x + \lim_{x \to -3} 2 = -1$$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 5x^2}{x^2}$

Resolución

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 5x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2(x-5)}{x^2} = \lim_{x \to 0}(x-5) = \lim_{x \to 0} x - \lim_{x \to 0} 5 = 0 - 5 = -5$$

Refuerza la técnica de factorización para calcular límites en los que la sustitución directa conduce a una indeterminación.

Actividad formativa 5.3

1. Determina los siguientes límites por factorización.

a) $\lim_{h \to 0} \frac{h^2 + h}{h}$ b) $\lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25}$ c) $\lim_{y \to 6} \frac{y^2 - 36}{y - 6}$

d) $\lim_{x \to 5/4} \frac{16x^2 - 25}{4x + 5}$ e) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$ f) $\lim_{x \to 9} \frac{x^3 - 17x^2 + 72x}{x - 9}$

Hay límites que incluyen expresiones con radicales y en los que por sustitución directa también se obtiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Por ejemplo,

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{\lim_{x \to 4}(\sqrt{x} - 2)}{\lim_{x \to 4}(x - 4)} = \frac{\lim_{x \to 4}\sqrt{x} - \lim_{x \to 4} 2}{\lim_{x \to 4} x - \lim_{x \to 4} 4} = \frac{\sqrt{\lim_{x \to 4} x} - 2}{4 - 4} = \frac{\sqrt{4} - 2}{0} = \frac{2 - 2}{0} = \frac{0}{0}$$

Para calcular este límite se usa la técnica de racionalización. Se puede racionalizar el numerador o el denominador haciendo lo siguiente:

- Racionalizar el denominador de una fracción algebraica significa transformar dicha fracción, de modo que el denominador se vuelva una expresión sin radicales. Para ello, se multiplica por un factor conveniente cuya expresión sea igual a 1. Por ejemplo:

  1. $\frac{x-1}{\sqrt{x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x}} \cdot 1 = \frac{x-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{(x-1)\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{(x-1)\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x}$
  2. $\frac{x+9}{\sqrt{x}+3} = \frac{x+9}{\sqrt{x}+3} \cdot 1 = \frac{x+9}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{x-3}{\sqrt{x}-3} = \frac{(x+9)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{(x+9)(\sqrt{x}-3)}{x-9}$

- Racionalizar el numerador de una fracción algebraica significa transformar dicha fracción, de modo que el numerador se vuelva una expresión sin radicales. Con ese objetivo, se multiplica por un factor conveniente cuya expresión sea igual a 1. Por ejemplo:

  1. $\frac{\sqrt{x}}{x-1} = \frac{\sqrt{x}}{x-1} \cdot 1 = \frac{\sqrt{x}}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{(x-1)\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}^2}{(x-1)\sqrt{x}} = \frac{x}{(x-1)\sqrt{x}}$
  2. $\frac{\sqrt{x}-3}{x+9} = \frac{\sqrt{x}-3}{x+9} \cdot 1 = \frac{\sqrt{x}-3}{x+9} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{x+9(\sqrt{x}+3)} = \frac{x-9}{(x+9)(\sqrt{x}+3)}$

Veamos ejemplos de cómo calcular límites utilizando la técnica de racionalización.

Ejemplo formativo 5.3

1. Calcula los siguientes límites por racionalización.

a) $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

Resolución

Primero, racionaliza el numerador y simplifica.

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot 1 = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\cancel{x-4}}{(\cancel{x-4})(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

Ahora, calcula el límite.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 4}1}{\lim\limits_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}+\lim\limits_{x\to 4}2}=\frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 4}x}+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

Resolución

Primero, racionaliza el denominador y simplifica.

$$\frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}\cdot 1=\frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=\frac{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{\cancel{x-3}}=\sqrt{x}+\sqrt{3}$$

Ahora, calcula el límite.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\lim_{x\to 3}(\sqrt{x}+\sqrt{3})=\lim_{x\to 3}\sqrt{x}+\lim_{x\to 3}\sqrt{3}=\sqrt{\lim_{x\to 3}x}+\sqrt{3}=\sqrt{3}+\sqrt{3}$$

$$=2\sqrt{3}$$

Actividad formativa 5.4

1. Determina los siguientes límites por racionalización.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 81}\frac{\sqrt{x}-9}{x-81}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}$ e) $\lim\limits_{x\to 49}\frac{x-49}{7-\sqrt{x}}$ f) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{x+2}}$

EVALUACIÓN FORMATIVA 5.1

1. Calcula el límite $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}$ usando aproximaciones por la izquierda y por la derecha.

x							-2						
$f(x)$													

El $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=$ ______.

2. Calcula el límite de $f(x)=\frac{x^2+3-4}{\sqrt{x}-3}$ cuando $x\to 4$, justificando cada paso mediante las propiedades de los límites.

3. Determina el límite $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-8}{h}$.

4. Calcula el límite $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+2x-1}$.

5. Calcula el límite $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{\sqrt{3x}-\sqrt{6}}$.

6. Determina el límite $\lim\limits_{t\to 4}\frac{16-t^2}{2\sqrt{t}-4}$.

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ______________________ Plantel: ______________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 5. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Calculé limites mediante la técnica de factorización y de racionalización. (M1-C1)			
Desarrollé la intuición para saber cuándo aplicar la técnica de factorización o de racionalización. (M2-C2)			
Desarrollé el proceso para calcular límites usando lenguaje matemático. (M1-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

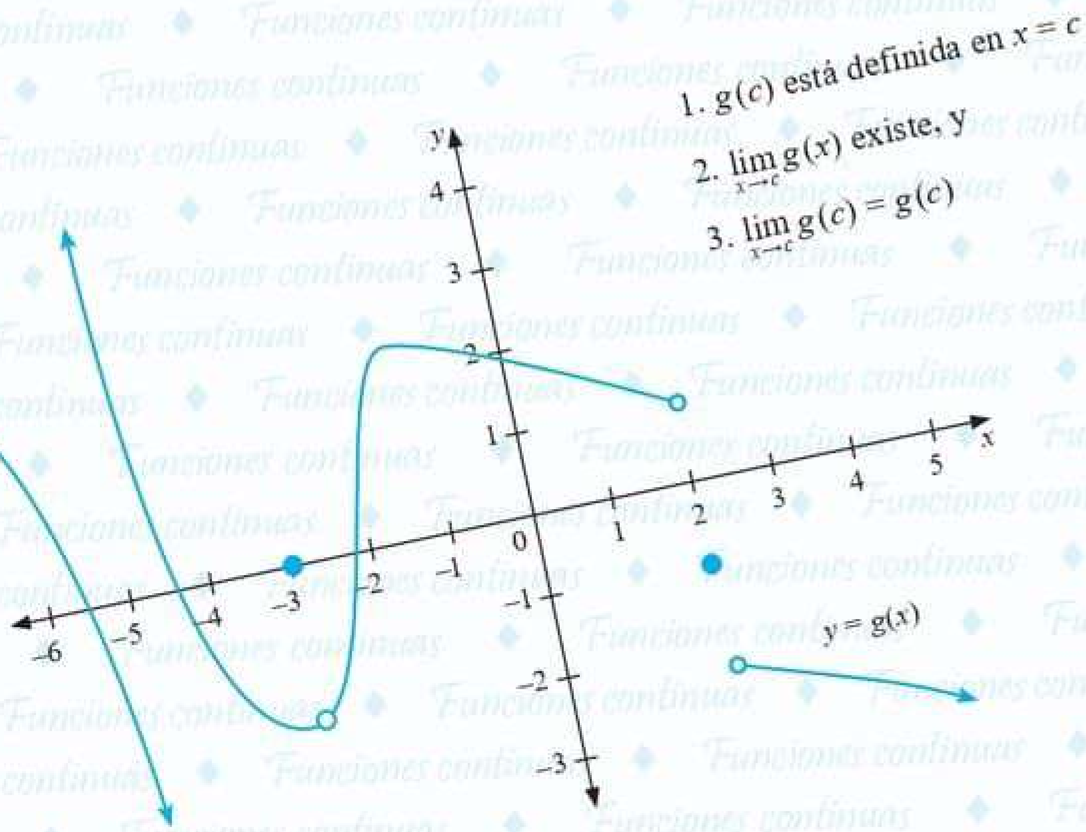
Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 5 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Calculó limites mediante la técnica de factorización y de racionalización. (M1-C1)			
Desarrolló la intuición para saber cuándo aplicar la técnica de factorización o de racionalización. (M2-C2)			
Desarrolló el proceso para calcular límites usando lenguaje matemático. (M1-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Funciones continuas



Progresión de aprendizaje 6

Identifica y contextualiza la continuidad de funciones utilizadas en la modelación de situaciones y fenómenos y hace un estudio, utilizando el concepto de límite, de las implicaciones de la continuidad de una función tanto dentro del desarrollo matemático mismo, como de sus aplicaciones en la modelación.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A			
	C			
	H			
M2-C4 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 6.1

1. El valor de $f(x) = \frac{3}{x}$ para $x = 0$ es:

   a) 0 b) 1 c) 3 d) No definida

2. El valor de $f(x) = \frac{x}{x+5}$ para $x = 0$ es:

   a) 0 b) $\frac{1}{5}$ c) 5 d) No definida

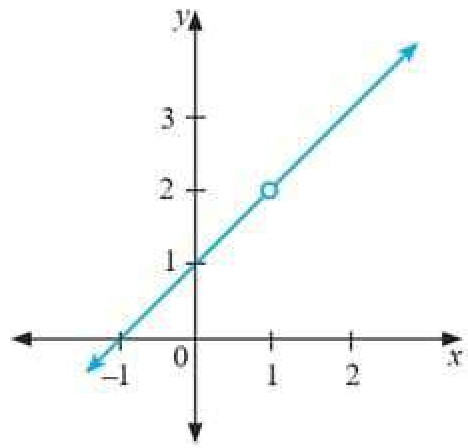
3. El valor de $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ para $x = 2$ es:

a) 0 b) 1 c) 2 d) No definida

4. El $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ es:

a) 0 b) 1 c) 2 d) No existe

5. ¿En qué punto la gráfica de $f(x)$ no es continua?



a) (–1, 0) b) (0, 1) c) (1, 2) d) (2, 3)

Mariana es una estudiante de bachillerato que se encuentra preparando un proyecto para su clase de ciencias. Su interés está en estudiar la calidad del aire en su comunidad y cómo varía, a lo largo del día, debido a factores como el tráfico y la actividad industrial. Ella decide enfocarse en una calle principal de su ciudad y coloca sensores que miden la concentración de contaminantes cada minuto durante 24 horas.

Para analizar los datos recolectados, Mariana utiliza una función $C(t)$, donde t representa el tiempo en horas, y $C(t)$ representa la concentración de contaminantes en partículas por millón (ppm) en la atmósfera. Observa que, durante ciertas horas del día, la concentración de contaminantes cambia de manera brusca debido a los horarios pico de tráfico, mientras que en otros momentos los cambios son más suaves (Figura 6.1). Esto la lleva a preguntarse si la función $C(t)$ es continua o presenta puntos de discontinuidad. De forma intuitiva, una función continua es aquella que se puede representar en una gráfica sin levantar el lápiz del papel.

Como se muestra en la Figura 6.1, la concentración de contaminantes muestra aumentos significativos durante las horas pico (7:00 a 9:00 a.m. y 5:00 a 7:00 p.m.). Durante estas horas, el tráfico aumenta y, por ende, también la contaminación. Fuera de esos intervalos, la concentración disminuye y presenta variaciones menores, simulando un comportamiento de menor actividad.

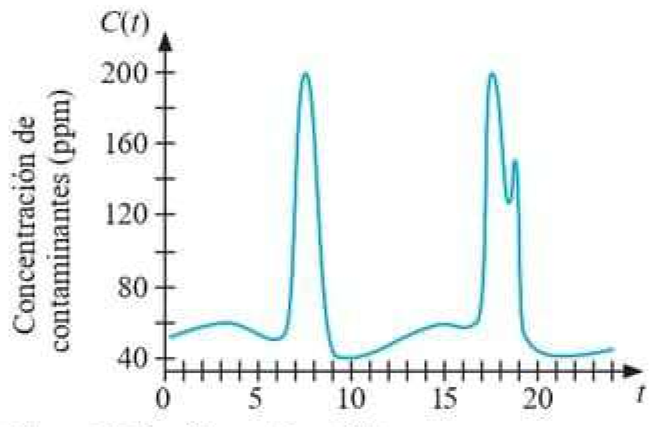


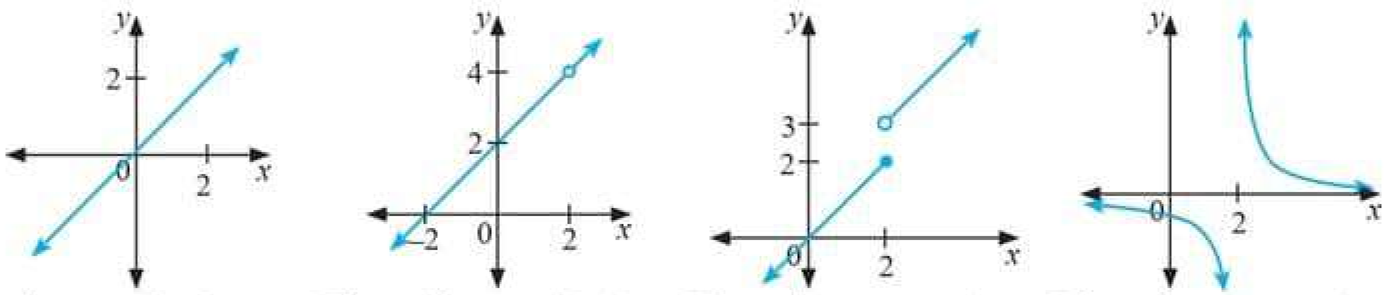
Figura 6.1. Función continua $C(t)$.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2025).

Esta representación gráfica permite ver la continuidad en la concentración de contaminantes a lo largo del día.

Continuidad en un punto

El concepto de continuidad de una función se vio a partir de una representación gráfica en la progresión de aprendizaje 4. En la Figura 6.2 se muestra si una función es continua o no en un punto.

$f(x) = x$ | $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2},\ x \neq 2$ | $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 2 \\ x+1, & x > 2 \end{cases}$ | $f(x) = \dfrac{1}{x-2},\ x \neq 2$

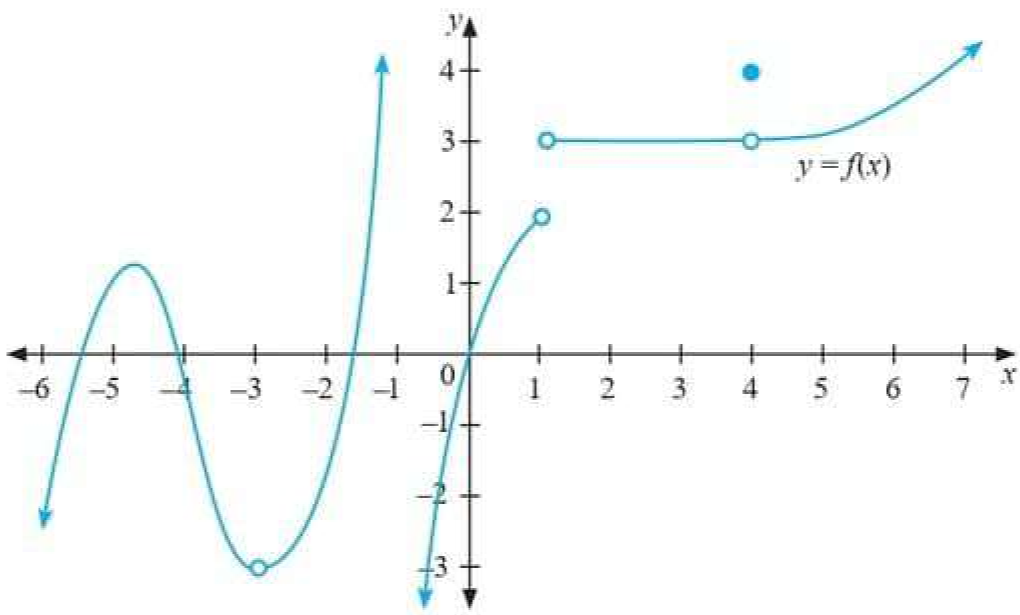


Continua en (2, 2) Continua en todo $\Re$.	Discontinua en (2, 4). Discontinuidad (hueco).	Discontinua en $x = 2$. Discontinuidad de salto finito.	Discontinua en $x = 2$. Discontinuidad de salto infinito.

Figura 6.2. Tipos de discontinuidad de una función en un punto.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2025).

Ejemplo formativo 6.1

1. La función $f(x)$, ¿en qué valores de x presenta discontinuidades?

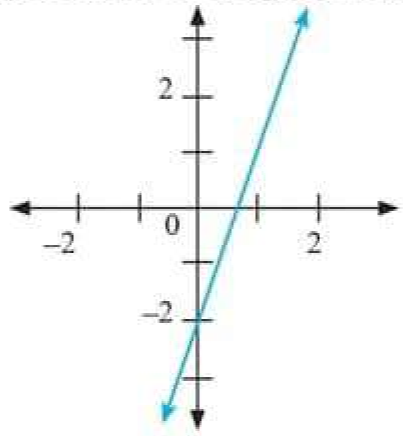


Resolución

- Es no continua en la coordenada (–3, –3), presenta una discontinuidad, hay un hueco.
- Es no continua para $x = -1$, presenta una discontinuidad de salto infinito.
- Es no continua para $x = 1$, presenta una discontinuidad de salto finito.
- Es no continua para $x = 4$, presenta un hueco con un punto desplazado hacia arriba, es decir, una discontinuidad.

Actividad formativa 6.1

1. Sea $f(x) = 3x - 2$, la función representada en la siguiente gráfica.

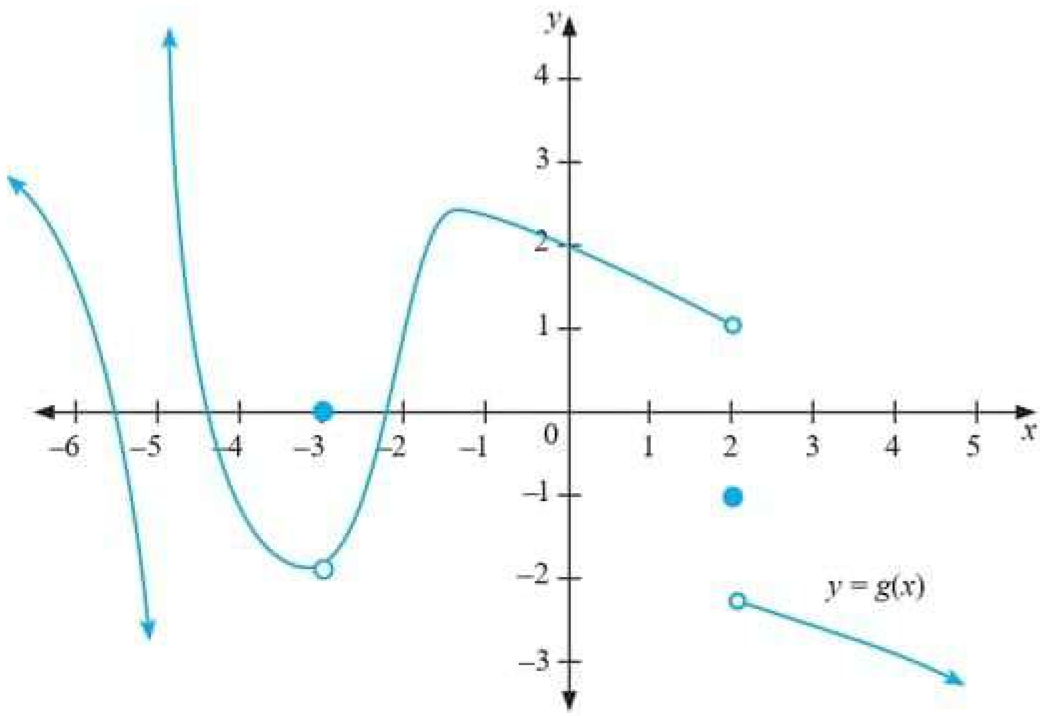


   a) ¿La función dada es continua? ________. ¿Por qué? ____________________________
   ____

   b) ¿La función está definida para $x = 4$? ______

   c) ¿La función es continua para cualquier valor de x? ______

2. Lee y contesta lo que se te indica, apoyándote en la siguiente representación gráfica.



   a) Escribe una coordenada en la que consideres que la función es continua. ______

   b) ¿La función es continua en el punto (0, 2)? ______

   c) ¿La función tiene una discontinuidad de salto finito para $x = -5$? ______

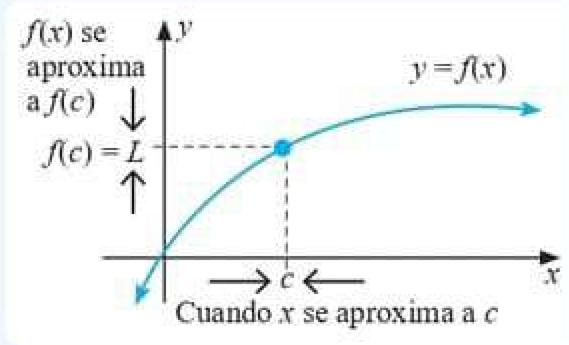
   d) ¿Qué tipo de discontinuidad presenta la función en (−3, −2)? _________________

   e) ¿Para qué valor de x la función presenta una discontinuidad de salto finito? __________

Para probar que una función es continua en un número real, lo haremos de forma analítica.

Definición de continuidad en un punto

La función f es continua en el punto $(c, f(c))$ si:



1. $f(c)$ está definida en $x = c$,
2. $\lim_{x\to c} f(x)$ existe, y
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Si las tres condiciones anteriores se cumplen, podemos afirmar que la función es continua en la coordenada $(c, f(c))$.

Ejemplo formativo 6.2

1. Determina mediante la definición de continuidad, si las siguientes funciones son continuas en el valor de x dado.

   a) $f(x) = x$, en $x = 0$

   b) $h(x) = \sqrt{2x+5}$, en $x = -1$

   c) $g(x) = \dfrac{1}{x}$, en $x = 0$

Resolución

a) $f(x) = x$, en $x = 0$.

Verifica si se satisfacen las tres condiciones de continuidad en un punto.

i. $f(0) = 0$. La función está definida en $x = 0$.

ii. $\lim_{x\to 0} x = 0$. El $\lim_{x\to 0} x$ existe.

iii. $\lim_{x\to c} x = f(0) = 0$.

Por lo tanto, la función $f(x) = x$ es continua en la coordenada $(0, 0)$.

b) $h(x) = \sqrt{2x+5}$, en $x = -1$.

Verifica si se satisfacen las tres condiciones de continuidad en un punto.

i. $h(-1) = \sqrt{2(-1)+5} = \sqrt{-2+5} = \sqrt{3}$. La función está definida en $x = -1$.

ii. $\lim_{x\to -1} \sqrt{2x+5} = \sqrt{\lim_{x\to -1}(2x+5)} = \sqrt{\lim_{x\to -1} 2x + \lim_{x\to -1} 5} = \sqrt{2(-1)+5}$

$= \sqrt{3}$. El $\lim_{x\to -1} \sqrt{2x+5}$ existe.

iii. $\lim_{x\to -1} \sqrt{2x+5} = f(-1) = \sqrt{3}$.

Por lo tanto, la función $f(x) = \sqrt{2x+5}$ es continua en la coordenada $(-1, \sqrt{3})$.

c) $g(x) = \frac{1}{x}$, en $x = 0$.

Verifica si se satisfacen las tres condiciones de continuidad en un punto.

i. $g(0) = \frac{1}{0}$. La función no está definida en $x = 0$.

Dado que $g(0)$ no está definida, la función es no continua en $x = 0$.

Actividad formativa 6.2

1. Determina mediante la definición de continuidad en un punto, si las siguientes funciones son continuas en el valor dado de la variable.

   a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, para $x = 3$.

   i. $f(3) =$ ________. La función ________ está definida para $x = 3$.

   ii. $\lim_{x \to 3^-} f(x) =$ ________. El $\lim_{x \to 3^+} f(x) =$ ________________________.

   iii. $\lim_{x \to 3} f(x)$________ $f(3)$

   Por lo tanto, la función es __________________ en la coordenada _____________.

   b) $g(x) = \sqrt{x + 3}$ para $x = -1$.

   c) $h(t) = \frac{\sqrt{t} - 2}{t - 4}$ para $t = 1, 4$.

   d) $f(x) = \frac{x - 4}{x - 2}$ para $x = -2, 0, 2, 4$.

   e) $g(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$ para $x = -1, 1, 5$.

2. La temperatura en grados Celsius a una altura h (en kilómetros) sobre el nivel del mar está definida por la función $T(h)$. ¿Por qué consideras que esta función debe ser continua?

EVALUACIÓN FORMATIVA 6.1

1. ¿Qué significa intuitivamente que una función sea continua?

2. En una montaña rusa, la altura $h(t)$ en función del tiempo debe ser continua. ¿Qué pasaría físicamente si $h(t)$ tuviera una discontinuidad?

3. La velocidad de un coche en función del tiempo durante un viaje, ¿puede tener discontinuidades? ¿Qué significaría físicamente?

4. El departamento de ingeniería civil de tu ciudad está diseñando un puente peatonal rígido que conectará con dos secciones de un parque público separadas por un río. El puente será elevadizo de dos hojas, permitiendo el paso de pequeñas embarcaciones por el río.

   La forma del puente cuando se encuentre elevado, puede modelarse matemáticamente mediante la función $h(x) = -\frac{0.01x^3 + x}{x}$ donde $h(x)$ representa la altura del puente (en metros) en función de la distancia x desde el inicio del puente (también en metros), donde $-10 \leq x \leq 10$. Para garantizar la seguridad y comodidad de los peatones, es importante verificar que el diseño no presente discontinuidades en su estructura. En particular, la función debe ser continua en todo el dominio, especialmente en $x = 0$, donde se unen las dos secciones del puente. Verifica si la función $h(x)$ es continua en $x = -1, 0, 1$ utilizando las tres condiciones de la continuidad.

5. Verifica mediante la definición de continuidad en un punto si las siguientes funciones son continuas para los valores dados.

   a) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$ para $x = -1, 1$.

   b) $g(x) = \frac{1}{x + 1}$ para $x = -1, 0$.

   c) $h(x) = \tan x$ para $x = \pi/2, \pi$.

   d) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ para $x = 2$.

   e) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ para $x = -1, 0, 1$.

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ________________________________ Plantel: ________________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 6. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Obtuve información de la representación gráfica de una función para verificar si es continua o no en un punto. (M1-C2)			
Socialicé con mis compañeros de equipo el proceso para verificar si una función es continua en un punto. (M2-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

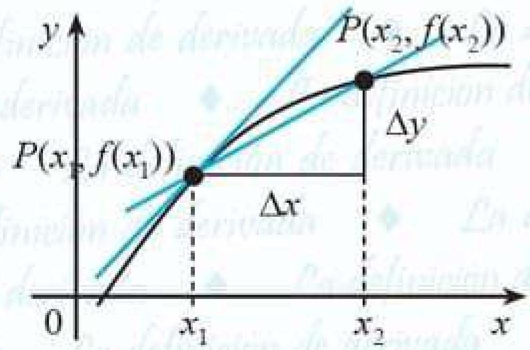
Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 6 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Obtuvo información de la representación gráfica de una función para verificar si es continua o no en un punto. (M1-C2)			
Socializó con mis compañeros de equipo el proceso para verificar si una función es continua en un punto. (M2-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

La definición de derivada



$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Progresión de aprendizaje 7

Interpreta, a partir de integrar diferentes perspectivas y métodos, el concepto central del cálculo diferencial, "la derivada", de forma intuitiva e intenta dar una definición formal, así como la búsqueda heurística para encontrar la derivada de la función constante, lineal y algunas funciones polinomiales.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del Pensamiento Matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	A			
	C			
	H			
M2-C2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 7.1

Analiza y selecciona la opción correcta en cada pregunta.

1. ¿Cuál es el resultado de desarrollar $(3a + 2b)^2$?

   a) $3a^2 + 2b^2$ b) $9a^2 + 12ab + 4b^2$ c) $9a^2 + 4b^2$

2. Si $f(x) = x^2$, ¿cuál es el valor de $f(x + h)$?

   a) $x^2 + h$ b) $x^2 + 2xh + h^2$ c) $x^2 + h^2$

3. ¿Cuál es el valor de la pendiente m de una recta que pasa por los puntos $P_1(-3, -5)$ y $P_2(2, 10)$?

   a) $m = -5$ b) $m = 3$ c) $m = -1$

4. ¿Cuál es el valor del $\lim_{x \to 5} \frac{x - 4}{x^2 - 9x + 20}$?

   a) 1 b) 0 c) No existe

5. ¿Para qué valor de x la función $f(x) = \frac{x + 3}{x^2 - x - 12}$ es discontinua?

   a) -3 b) -4 c) 12

La posición en metros, que ocupa un ciclista, al recorrer un determinado trayecto está dada por la relación $f(t) = 2t^2 + 20t$, el tiempo medido en minutos. ¿Podrías calcular su velocidad en el instante $t = 30$ min?

Con las herramientas que tienes hasta el momento, solo podrías calcular la velocidad promedio en un intervalo de tiempo, por ejemplo, en el intervalo [10, 20] minutos. El resultado sería la velocidad promedio, pero no puedes calcular la velocidad en un instante de tiempo.

Razón de cambio instantánea

En progresiones anteriores, estudiaste el concepto de cambio en diversos contextos, aprendiste a modelarlo y exploraste el uso del límite para analizar el comportamiento de las funciones en puntos específicos. Con estas herramientas, ahora explorarás el concepto de derivada, uno de los pilares fundamentales del cálculo diferencial.

Para acercarte de forma intuitiva a este concepto, considera que la derivada de una función expresa cómo cambia el valor de la función cuando se realiza un cambio pequeño de la variable independiente. En otras palabras, la derivada permite cuantificar la razón de cambio instantánea de una función en un punto determinado.

En una prueba de maratón, el tiempo que un atleta tarda en completar la carrera depende de la velocidad con la que se desplaza a lo largo del recorrido. Esta velocidad no es constante durante toda la carrera. El que triunfa puede no liderar desde el principio, sino que alterna posiciones con otros competidores hasta que, finalmente, acelera y llega en primer lugar.

Estudiar cómo varía el movimiento ha sido uno de los temas centrales abordados a lo largo de la historia del pensamiento matemático y filosófico; precisamente, el concepto de derivada juega un papel importante en ello como concepto de variación o razón de cambio instantáneo.

Actividad formativa 7.1

Don Alberto Martínez es representante de ventas de una empresa productora de alimentos en Sinaloa. En su más reciente viaje, siguió el itinerario indicado en el mapa de la Figura 7.1.

1. Completa la siguiente tabla en la que se registran la distancia y el tiempo de cada tramo del trayecto que recorrió conduciendo.

Trayecto	Distancia (km)	Tiempo (h)	Velocidad (km/h)
Choix - El Fuerte	48	0.5	
El Fuerte - Los Mochis	85	1.5	
Los Mochis - Guasave	65	1	
Guasave - Guamúchil	45	0.5	
Guamúchil - Culiacán	106	1.2	
Culiacán - Mazatlán	210	2.5	

Figura 7.1. Mapa de Sinaloa
Fuente: Lamudi. Disponible en https://www.lamudi.com.mx/journal/mapa-sinaloa/

2. Responde las siguientes preguntas:
   a) ¿Cuál fue la velocidad promedio con la que condujo el señor Martínez?______________
   b) ¿En qué trayecto condujo más rápido? ______________________________________
   c) ¿En qué trayecto condujo más lento? _______________________________________
   d) ¿En qué trayecto el cambio en la velocidad fue mayor respecto al anterior? ___________
   ____

En la actividad anterior calculaste la velocidad promedio con la que condujo el señor Martínez, entendida como el cociente entre la distancia total recorrida y el tiempo total utilizado para recorrerla, $v(t) = \frac{d}{t}$.

Es importante notar que, aunque en la vida diaria se utilizan indistintamente, en la física velocidad y rapidez no significan lo mismo. La rapidez solo mide cuánto se ha movido un objeto, mientras que la velocidad también toma en cuenta la dirección del movimiento.

Si el señor Martínez registró que, exactamente una hora después de iniciar su viaje, conducía a una velocidad de 60 km/h, entonces esa es la velocidad instantánea con la que conducía en el minuto 60 de su recorrido, es decir, la velocidad en un instante específico.

Cuando dos cantidades están relacionadas, puedes analizar la razón de cambio instantánea de una con respecto a la otra. Por ejemplo, es posible estudiar la velocidad a la que se desplaza un objeto en función del tiempo, la velocidad a la que se llena un tanque de agua en función del caudal que lo alimenta, la velocidad a la que aumenta la distancia entre dos objetos que se mueven en direcciones diferentes, o la razón de crecimiento de una población de bacterias con respecto al tiempo. En economía, se puede analizar la razón de crecimiento de la producción o los costos. En estos y otros casos, la razón de cambio instantánea entre las dos cantidades relacionadas permite estudiar cómo varía una cantidad en un momento específico.

La razón de cambio instantánea de una función $f(t)$ que describe la variación de una cantidad en función del tiempo se define como el límite de la razón de cambio promedio a medida que el intervalo de tiempo se hace cada vez más pequeño. Matemáticamente, se expresa como:

$$\text{Razón de cambio instantánea} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Donde:

- Δt representa un pequeño intervalo de tiempo.
- $f(t + \Delta t) - f(t)$ representa el cambio en la función $f(t)$ durante el intervalo Δt.
- El límite cuando Δt se acerca a 0 representa **la razón de cambio instantánea de $f(t)$ con respecto a t.**

Entonces, **la velocidad instantánea** es el límite de la razón de cambio de la función de posición con respecto al tiempo (velocidad promedio). Esto se expresa como:

$$v_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Ejemplo formativo 7.1

1. La posición en metros, que ocupa un ciclista, al recorrer un determinado trayecto está dada por la relación $f(t) = 2t^2 + 20t$.
   a) Determina su velocidad en el instante $t = 30$ minutos.
   b) Determina su aceleración en ese instante.

Resolución

a) La velocidad en el instante $t = 30$, $v_i(30)$, coincide con la razón de cambio instantánea.

$$v_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[2(t + \Delta t)^2 + 20(t + \Delta t)] - [2t^2 + 20t]}{\Delta t}$$

$$v_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[2(t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2) + 20t + 20\Delta t)] - [2t^2 + 20t]}{\Delta t}$$

$$v_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t^2 + 4t\Delta t + 2(\Delta t)^2 + 20t + 20\Delta t - 2t^2 - 20t}{\Delta t}$$

$$v_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4t\Delta t + 2(\Delta t)^2 + 20\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (4t + 2\Delta t + 20)$$

$$v_i(t) = 4t + 2(0) + 20$$

$$v_i(t) = 4t + 20$$

Para obtener la velocidad en el instante $t = 30$ minutos, se sustituye en la función obtenida t por 30: $v_i(30) = 4(30) + 20$.

La velocidad en el instante $t = 30$ minutos es $v_i(30) = 140$ m/min.

b) Puesto que la aceleración es la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo, aplica nuevamente el concepto de razón de cambio instantánea.

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[4(t + \Delta t) + 20] - [4t + 20]}{\Delta t}$$

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[4t + 4\Delta t + 20] - 4t - 20}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4\Delta t}{\Delta t} = 4 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta t} = 4(1) = 4$$

La aceleración es 4 m/min^2, lo cual significa que en cada minuto su velocidad se incrementó en 4 m/min.

La pendiente como razón de cambio instantánea

Como apreciaste, la razón de cambio instantánea es un proceso de límite. Ahora, explorarás su significado geométrico, para visualizar gráficamente su comprensión. En la progresión de aprendizaje 2, aprendiste que una recta tangente a una curva es una línea que toca la curva en un único punto sin cruzarla. En el punto de tangencia, la recta tiene la misma dirección que la curva, lo que significa que comparten la misma pendiente en ese punto.

En general, para encontrar la recta tangente solo necesitamos un punto y su pendiente. También en esa misma progresión, viste que, si solo tienes las coordenadas de un punto, enfrentas un problema porque normalmente se requieren dos puntos para calcular la pendiente. El problema se puede resolver hallando una aproximación para la pendiente tomando un punto cercano al punto en cuestión.

Considera la función $f(x)$ y un punto P fijo con coordenadas $x_1 = x$ y $f(x_1) = f(x)$ y un punto móvil Q con coordenadas $x_2 = x + \Delta x$ y $f(x_2) = f(x + \Delta x)$, donde Δx es una pequeña variación de x como se muestra en la Figura 7.2.

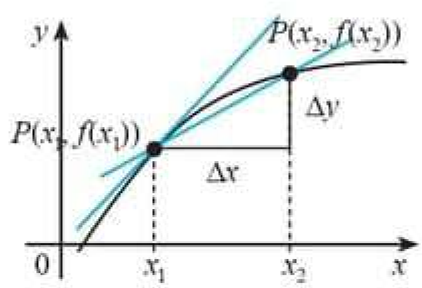


Figura 7.2. Curva de una función $y = f(x)$ con tangente y secante.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2025).

Se puede calcular la pendiente de la recta secante mediante la fórmula:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Y como: $f(x_2) = f(x + \Delta x)$ y $f(x_1) = f(x)$, se tiene:

$$m_{PQ} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

El punto Q se desplaza a lo largo de la curva, acercándose gradualmente al punto P. A medida que Q se aproxima a P, la recta secante que pasa por estos dos puntos también se mueve y gira, acercándose cada vez más a la posición límite de la recta tangente a la curva en el punto P.

Esto ocurre cuando P y Q están casi superpuestos, es decir, cuando la distancia entre ellos es prácticamente nula ($\Delta x \to 0$). En este momento, la pendiente de la recta secante se aproxima cada vez más a la pendiente de la recta tangente en el punto P.

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} m_{PQ} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La razón de cambio promedio tiene un límite que, como ya conoces, se denomina razón de cambio instantánea. Esto se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto, lo que indica cómo varía el valor de la función respecto a la variable independiente.

Derivada de una función

Los análisis anteriores, en los que primero consideramos la velocidad instantánea como la razón de cambio instantánea de la velocidad promedio para un valor determinado del tiempo, y luego interpretamos la pendiente de la recta secante a una curva en un punto determinado como la razón de cambio instantánea o el límite de las pendientes de las rectas secantes, constituyen problemas fundamentales que dieron origen al concepto general de derivada, el cual se aplica en numerosos otros campos.

Es decir, la razón de cambio instantánea se identifica como la derivada de la función $y = f(x)$ en un punto específico y se denota por $f'(x)$.

Sea x_0 el punto específico y $x_0 + h$ otro punto, de modo que $\Delta x = (x_0 + h) - x_0 = h$; si $\Delta x \to 0$, entonces $h \to 0$. Se tiene

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Definición de derivada de $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$

La derivada de la función f, representada por f' en el punto $(x_0, f(x_0))$, es

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

si el límite existe.

Para que una **función sea derivable en un punto (que exista su derivada), una condición necesaria es que sea continua en ese punto, además, que no presente picos (que sea suave) y que la recta tangente en un punto no sea vertical.** Ya conoces que, una función $f(x)$ es continua en el punto $(x_0, f(x_0))$, si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $f(x_0)$ está definida.
2. El límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 existe.
3. El valor de la función en x_0 es $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

La derivada de una función, representada por una curva, en cualquier punto representa la pendiente m_t de la recta tangente a la curva en ese punto. En el caso de una función que describe la posición de un objeto en movimiento, su derivada proporciona la velocidad instantánea del objeto. En resumen, la derivada refleja la razón de cambio de la función en un punto específico, y se determina mediante un proceso de límite.

Ejemplo formativo 7.2

1. Calcula la pendiente de la recta tangente a $f(x) = 2x^2 - 1$ en el punto $x_0 = 1$.

Resolución

Calcula $f(1 + h)$ y $f(1)$.

$f(1 + h) = 2(1 + h)^2 - 1 = 2(1 + 2h + h^2) - 1 = 2 + 4h + 2h^2 - 1 = 1 + 4h + 2h^2$ y $f(1) = 2(1)^2 - 1 = 1$.

Aplica la definición de derivada.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + 4h + 2h^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} 4 + 2h = 4$$

La pendiente de la recta tangente es $m_t = f'(1) = 4$.

Actividad formativa 7.2

1. Calcula la pendiente de la recta tangente a la curva en los valores dados:
   a) $f(t) = 5t - 5$ en $t_0 = 1$.
   b) $v(t) = 2t^2 + 2t - 4$ en $t_0 = 0$.
2. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con la ecuación de movimiento $f(t) = t^2 - 2t + 1$ medida en metros y t en segundos. Calcula la velocidad cuando $t_0 = 2$ segundos.

   Resolución

   $f(2 + h) =$ ______________________________

   $f(2) =$ ______________________________

   $f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0}$

   La velocidad en el instante $t_0 = 2$ segundos es igual a ____________________

Si consideramos que en cualquier valor de x del dominio de la función $f(x)$ existe el límite de la razón de cambio instantánea, entonces, $f'(x)$ es considerada una nueva función, llamada **derivada de** f y se define de la siguiente forma:

Definición de derivada de $f(x)$

La función derivada de la función $f(x)$ representada por $f'(x)$, es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

si el límite existe para todo x de su dominio.

Si utilizas la notación $y = f(x)$ para indicar que la variable independiente es x y la dependiente es y, entonces algunas notaciones comunes para la derivada son:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Los símbolos D y $\frac{dy}{dx}$ se llaman operadores de derivación porque indican la operación de derivación, que es el proceso de calcular una derivada.

Pasos para calcular la derivada de la función $f(x)$ a partir de la definición.

Determinar:

Pasos 1. $f(x+h)$

Paso 2. $f(x+h)-f(x)$

Paso 3. $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Paso 4. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Ejemplo formativo 7.3

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

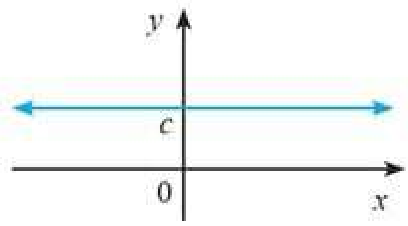
 a) $f(x)=c$, donde c es una constante.

 b) $f(x)=x$

 c) $f(x)=x^2$

Resolución

a) $f(x)=c$, donde c es una constante.



Paso 1. $f(c+h)=c$

Paso 2. $f(c+h)-f(c)=c-c=0$

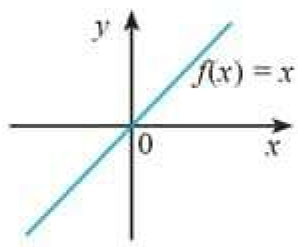
Paso 3. $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{0}{h}=0$

Paso 4. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0}{h}=0$

La derivada de una función constante es cero. Es decir, si $f(x)=c$, donde c es una constante, entonces $f'(x)=0$.

Esto lo puedes observar en la gráfica anterior, donde la curva es una recta paralela al eje x. Al no tener inclinación respecto a dicho eje, la pendiente de dicha recta es cero.

b) $f(x)=x$



Paso 1. $f(x+h)=x+h$

Paso 2. $f(x+h)-f(x)=x+h-x=h$

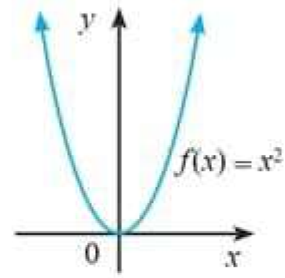
Paso 3. $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{h}{h}=1$

Paso 4. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=0$

La derivada de la función $f(x)=x$ es uno, esto es, $f'(x)=1$.

Esto indica que la pendiente no cambia. Lo puedes observar en la gráfica anterior, la variación es constante en todo el dominio de la función. Ese comportamiento de la derivada constante e igual a 1 para la función $f(x)=x$, refleja la propiedad de que la razón de cambio instantánea de esta función es siempre igual a 1, es decir, un incremento unitario en x produce un incremento unitario en $f(x)$.

c) $f(x) = x^2$



Paso 1. $f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$

Paso 2. $f(x+h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2$

Paso 3. $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$

Paso 4. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (2x + h) = \lim\limits_{h \to 0} 2x + \lim\limits_{h \to 0} h = 2x$

La derivada de $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$.

Esto indica que la función cambia más rápidamente en la medida que x aumenta. Comprueba esta afirmación utilizando un graficador de funciones.

Las funciones lineales de la forma $f(x) = mx + b$ muestran un comportamiento similar al de la función $f(x) = x$. Gráficamente, esto se refleja en que la gráfica de una función lineal es una recta con pendiente m. Debido a que la pendiente es constante, la variación de la función también es constante a lo largo de todo su dominio. Así, si $f(x) = mx + b$, su derivada es $f'(x) = m$.

Utilizando la definición de derivada, puedes comprobar que la derivada de la función $f(x) = x^3$, es $f'(x) = 3x^2$, la de $f(x) = x^4$, es $f'(x) = 4x^3$, la de $f(x) = x^5$, es $f'(x) = 5x^4$ y así sucesivamente. A partir de estos cálculos, se infiere que la derivada de $f(x) = x^n$ es $f'(x) = nx^{n-1}$, siendo n un número entero.

En resumen, ya conoces las derivadas de las funciones siguientes:

Función	$f(x) = c$	$f(x) = x$	$f(x) = mx + b$	$f(x) = x^2$	$f(x) = x^n$
Derivada	$f'(x) = 0$	$f'(x) = 1$	$f'(x) = m$	$f'(x) = 2x$	$f'(x) = nx^{n-1}$

Actividad formativa 7.3

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones utilizando la definición.
   a) $f(x) = 8$
   b) $f(x) = 2x - 1$
   c) $f(x) = x^2 + 1$
2. Encuentra la pendiente de la recta tangente en el valor dado para las siguientes funciones.
   a) $f(x) = 2x - 3$ en $x_0 = 2$.
   b) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ en $x_0 = 1$.
3. Demuestra, utilizando la definición de derivada, que si $f(x) = mx + b$, su derivada es $f'(x) = m$.

A continuación, se presentan las derivadas de algunas funciones trascendentes importantes, que estudiarás en detalle en progresiones siguientes.

Función	$f(x) = e^x$	$f(x) = a^x$	$f(x) = \ln x$	$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f(x) = \cos x$
Derivada	$f'(x) = e^x$	$f'(x) = a^x \ln a$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$

EVALUACIÓN FORMATIVA 7.1

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones utilizando la definición:

   a) $f(x) = 5x + 6$

   b) $f(x) = x^2 + 6x$

   c) $f(x) = 2x^3$

2. Encuentra la pendiente de la recta tangente en el punto dado para las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 8x + 4$ en el punto $(-1, -4)$

   b) $f(x) = x^2 - 3x + 6$ en el punto $(2, 4)$.

3. Con el objetivo de mejorar los sistemas de riego en el estado de Sinaloa, un grupo de ingenieros hidrológicos realiza experimentos para conocer la velocidad del agua. Para ello, sueltan un dispositivo flotante en el caudal de agua desde la compuerta principal. La función $f(t) = 0.002t^2$ representa la distancia en kilómetros recorrida por el dispositivo flotante después de t minutos desde el inicio de la prueba.

   a) Si la primera lectura se toma a los 15 minutos después de haber soltado el dispositivo, ¿qué distancia habrá recorrido el agua?

   b) La segunda y tercera lecturas se toman a los 30 y 45 minutos, respectivamente. ¿Cuál será la velocidad promedio entre estas dos lecturas?

   c) Determina la velocidad instantánea en la primera lectura.

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ______________________ Plantel: ______________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 7. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Utilicé diversas perspectivas para comprender e interpretar el concepto de derivada y su definición formal. (M2-C1)			
Encontré la derivada de funciones constantes, lineales y algunas funciones polinomiales empleando la definición de derivada. (M2-C2)			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 7 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Utilizó diversas perspectivas para interpretar el concepto de derivada y su definición formal. (M2-C1)			
Encontró la derivada de funciones constantes, lineales y algunas funciones polinomiales empleando la definición de derivada. (M2-C2)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Reglas básicas de derivación

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2},\ g(x) \neq 0$$

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot = g'(x)$$

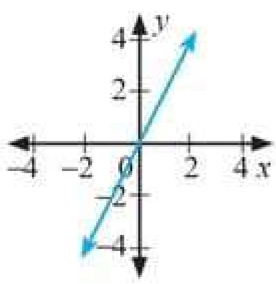
Progresión de aprendizaje 8

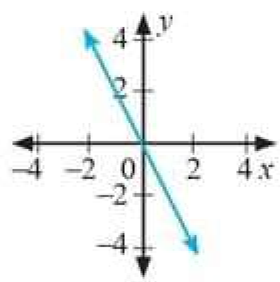
Encuentra de manera heurística algunas reglas de derivación como la regla de la suma, la regla del producto, la regla del cociente y la regla de la cadena y las aplica en algunos ejemplos.

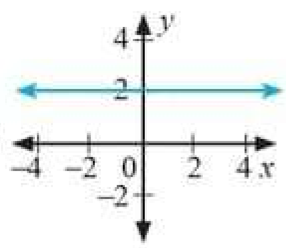
Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M3-C2 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	A			
	C			
	H			
M4-C3 Construye y plantea posibles soluciones a problemas de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 8.1

1. Selecciona la gráfica que se corresponde con la derivada de la función $f(x) = -x^2$.

a) 

b) 

c) 

2. La derivada de $f(x) = 4x^3 - 1$ es:

a) $12x^2 - 1$ b) $12x^2$ c) $4x^3$

3. Completa la siguiente tabla:

Función	Derivada	$f'(-3)$
$f(x) = 7$		
$f(x) = \frac{1}{2}x$		
$f(x) = \frac{3}{4}x^4$		

En la progresión anterior, utilizaste la definición para calcular la derivada de varias funciones incluyendo funciones constantes, lineales y algunos polinomios sencillos. Supongamos que necesitas calcular la derivada de la función $f(x) = 3(x^2 + 1)$ sen x. Este proceso puede ser bastante complicado y laborioso, por lo que es útil contar con herramientas que faciliten el cálculo de derivadas de manera más sencilla y eficiente.

Reglas de derivación

En la progresión anterior se definió la **derivada de una función $f(x)$** formalmente como:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ siempre que el límite exista.}$$

Recuerda las derivadas que obtuviste o se presentaron en la progresión anterior.

Función	Derivada
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = mx + b$	$f'(x) = m$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$

Función	Derivada
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$

Ahora estudiarás algunas reglas fundamentales que te permitirán calcular derivadas de manera más eficiente, sin tener que recurrir directamente a la definición. Estas reglas simplificarán el proceso de diferenciación y evitarán tener que utilizar la definición de derivada en cada caso. De aquí en adelante, asumirás que las funciones que utilizas para enunciar y demostrar las reglas de derivación tienen derivadas definidas. Estas reglas de derivación facilitan el cálculo de derivadas de funciones algebraicas y trascendentes.

Regla de la derivada del producto de una constante por una función

La derivada de una constante por una función es la constante multiplicada por la derivada de la función.

$$[cf(x)]' = cf'(x)$$

Demostración

La definición de derivada y las propiedades de los límites permiten demostrar esta regla.

$$[cf(x)]' = \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= c \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x)$$

Ejemplo formativo 8.1

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones.
   a) Si $f(x) = 7x^3$, entonces $f'(x) = 7(x^3)' = 7(3x^2) = 21x^2$
   b) Si $f(x) = -5x$, entonces $f'(x) = -5(x)' = -5(1) = -5$
   c) Si $f(x) = \frac{1}{2}$ sen x, entonces $f'(x) = \frac{1}{2}(\text{sen } x)' = \frac{1}{2}\cos x$
   d) Si $f(x) = 3 \ln x$, entonces $f'(x) = 3(\ln x)' = \frac{3}{x}$

Regla de la derivada de la suma de funciones

La derivada de la suma de dos funciones es igual a la suma de las derivadas de cada función.

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

Demostración

Sea $H(x) = f(x) + g(x)$, entonces aplicando la definición de derivada y las propiedades de los límites se tiene

$$[f(x) + g(x)]' = H'(x)$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{H(x+h) - H(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

Esta regla es válida para la suma de cualquier número de funciones. Por ejemplo, para tres funciones f, g y h:

$$[f(x) + g(x) + h(x)]' = [(f(x) + g(x)) + h(x)]' = [f(x) + g(x)]' + h'(x)$$
$$= f'(x) + g'(x) + h'(x)$$

Regla de la derivada de la diferencia de dos funciones

La derivada de la diferencia de dos funciones es igual a la diferencia de las derivadas de cada función.

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

Demostración

Basta considerar y aplicar la regla de la suma $f(x) - g(x) = f(x) + (-1)\, g(x)$ y la de una constante por una función.

Estas tres reglas y la derivada de $(x^n)' = nx^{n-1}$ permiten derivar cualquier función polinomial.

Ejemplo formativo 8.2

1. Sea $f(x) = x^7 + 3x^4 - 2x^2 + 4x - 3$. Halla $f'(x)$.

Resolución

Aplica las reglas estudiadas.

$$f'(x) = (x^7)' + 3(x^4)' - 2(x^2)' + 4(x)' - (3)' = 7x^6 + 12x^3 - 4x + 4$$

Actividad formativa 8.1

1. Halla la derivada de las siguientes funciones.
   a) $g(x) = x^3 + 3x^2 - 5$
   b) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{4}$
   c) $h(t) = 0.3t^{10} + 0.2t^5 - \sqrt{5}$

Regla de la derivada del producto de dos funciones

Las reglas para derivar la suma o diferencia de funciones establecen que la derivada de una suma o resta es simplemente la suma o resta de las derivadas individuales. Ahora, podrías preguntarte si la derivada del producto de dos funciones es igual al producto de las derivadas de cada una de ellas.

Veamos, sea $f(x) = x^5 \cdot x^3$, entonces $f(x) = x^8$ y $f'(x) = 8(x^7) = 8x^7$.

Considera ahora el producto, $f'(x) = [x^5 \cdot x^3]' = (x^5)'\,(x^3)' = (5x^4)(3x^2) = 15x^6$.

Puedes ver que $[x^8]' = 8x^7 \neq 15x^6 = [x^5 \cdot x^3]'$, esto significa que la derivada del producto no es simplemente el producto de las derivadas. Se hace necesario buscar una regla para calcular la derivada de un producto.

La derivada del producto de dos funciones es igual al producto de la derivada de la primera función por la segunda más el producto de la primera función por la derivada de la segunda.

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Demostración

Aplicando la definición de derivada se tiene

$$[f(x) \cdot g(x)]' = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) \cdot g(x+h)] - [f(x) \cdot g(x)]}{h}$$

Suma y resta $f(x+h) \cdot g(x)$ en la expresión anterior

$$\lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) \cdot g(x+h)] - [f(x) \cdot g(x)] + f(x+h) \cdot g(x) - f(x+h) \cdot g(x)}{h}$$

Agrupa términos convenientemente y aplica las propiedades de los límites

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x)[f(x+h)-f(x)]+f(x+h)\,[g(x+h)-g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x)[f(x+h)-f(x)]}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\,[g(x+h)-g(x)]}{h}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Esta regla es válida para el producto de cualquier número de funciones.

Sean $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$, entonces aplicando la regla anterior tenemos

$$[f(x)g(x)h(x)]' = [f(x)g(x)]'h(x) + [f(x)g(x)]h'(x)$$

$$= [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]h(x) + [f(x)g(x)]h'(x)$$

$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

Como puedes ver, la derivada del producto de tres funciones es igual a la suma de tres términos: el producto de la derivada de la primera función por las otras dos, más el producto de la derivada de la segunda función por la primera y la tercera, más el producto de la derivada de la tercera función por la primera y la segunda.

Ejemplo formativo 8.3

1. Halla la derivada de las siguientes funciones aplicando la regla del producto.

   a) $f(x) = x^5 \cdot x^3$

   b) $f(x) = (x - 3)\text{sen}\, x$

   c) $g(x) = e^x \cos x$

   d) $h(x) = (x^2 + 1) \ln x$

   Resolución

   a) $f'(x) = [x^5 \cdot x^3]' = (x^5)'x^3 + x^5(x^3)' = 5x^4 \cdot x^3 + x^5 \cdot 3x^2 = 5x^7 + 3x^7$
   $= 8x^7$

   b) $f'(x) = (x-3)'\text{sen}\, x + (x-3)(\text{sen}\, x)' = (1)\text{sen}\, x + (x-3) \cos x$
   $= \text{sen}\, x + (x-3) \cos x$

   c) $g'(x) = (e^x)'\cos x + e^x (\cos x)' = e^x \cos x + e^x (-\text{sen}\, x)$
   $= e^x \cos x - e^x \text{ sen}\, x = e^x (\cos x - \text{sen}\, x)$

   d) $h'(x) = (x^2+1)' \ln x + (x^2+1)(\ln x)' = (2x) \ln x + (x^2+1)\,\frac{1}{x}$
   $= 2x\ln x + \frac{x^2+1}{x} = 2x\ln x + x + \frac{1}{x}$

Actividad formativa 8.2

1. Halla la derivada de las siguientes funciones.

   a) $f(x) = (x + 5)x^2$

   b) $f(x) = 5(x + 4)x^4$

   c) $f(t) = (t^3 + 1)e^t$

d) $g(x) = \cos x \ln x$

e) $h(x) = \operatorname{sen} x \cos x$

2. Determina una expresión para la derivada del producto de las cuatro funciones f, g, u y v.

Regla de la derivada del cociente de dos funciones

La derivada del cociente de dos funciones es igual al producto de la derivada del numerador por el denominador, menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido por el denominador al cuadrado.

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, \ g(x) \neq 0$$

Para realizar la demostración se procede de manera análoga a la demostración de la regla del producto.

Ejemplo formativo 8.4

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $g(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

b) $h(x) = \dfrac{3}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

Resolución

a) $g'(x) = \dfrac{(x-1)'(x+1) - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \dfrac{(1)(x+1) - (x-1)(1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

b) $h'(x) = \dfrac{(3)'(x-3) - 3(x-3)'}{(x-3)^2} = \dfrac{(0)(x-3) - 3(1)}{(x-3)^2} = \dfrac{-3}{(x-3)^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - \operatorname{sen} x (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \dfrac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2}$

$= \dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{(\cos x)^2} = \dfrac{1}{(\cos x)^2} = \sec^2 x$

El inciso c) establece que, como $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x$, entonces $f'(x) = [\tan x]' = \sec^2 x$.

Actividad formativa 8.3

1. Halla la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{3x+6}{4x-2}$

b) $g(x) = \dfrac{7x-2}{6x+5}$

c) $h(x) = \dfrac{-x+9}{-3x+1}$

d) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

2. Demuestra la regla de la derivada del cociente de dos funciones.

En los incisos d), e) y f) se establecen las fórmulas para las derivadas de las funciones $f(x) = \cot x$, $f(x) = \csc x$ y $f(x) = \sec x$.

Actividad formativa 8.4

1. Completa las siguientes tablas.

Función	Derivada
$f(x) = \text{sen } x$	
	$f'(x) = -\text{sen } x$
$f(x) = \tan x$	

Función	Derivada
	$f'(x) = -\csc^2 x$
$f(x) = \sec x$	
	$f'(x) = -\csc x \cot x$

Regla de la cadena (derivada de funciones compuestas)

¿Cuál de las reglas estudiadas podrías utilizar para calcular la derivada de la función $f(x) = (x + 3)^2$?

Aunque se puede utilizar la fórmula de la derivada de un producto de funciones, para determinar una forma más sencilla, especialmente cuando se presenta una potencia mayor, utilizaremos otra regla. Observa la función $f(x)$; aprecia que es una función compuesta. Esto es $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = [g(x)]^2$, es decir la función f toma como entrada el resultado de otra función, en este caso $g(x)$ donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones independientes. Para derivar esta función se utilizará la regla de la cadena.

Regla de la cadena

Si g es derivable en x y f en $g(x)$, entonces la función compuesta definida mediante $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$, es derivable en x, y

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

Ejemplo formativo 8.5

1. Halla la derivada de las siguientes funciones.

   a) $f(x) = (2x + 3)^2$

   b) $g(x) = e^{3x}$

   c) $h(x) = \text{sen } 2x$

Resolución

a) Sea $f(g(x)) = (g(x))^2$ y $g(x) = 2x + 3$

$$f'(g(x)) = 2g(x) \text{ y } g'(x) = 2$$

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] = 2g(x) \cdot 2 = 2(2x + 3) \cdot 2 = 4(2x + 3) = 8x + 12$$

b) Sea $g(f(x)) = e^{f(x)}$ y $f(x) = 3x$

$$g'(f(x)) = e^{f(x)} \text{ y } f'(x) = 3$$

$$(g \circ f)'(x) = g'[f(x)] = e^{f(x)} \cdot 3 = 3e^{3x}$$

c) Sea $h(g(x)) = \text{sen } g(x)$ y $g(x) = 2x$

$$h'(x) = \cos g(x) \text{ y } g'(x) = 2$$

$$(h \circ g)'(x) = h'[g(x)] = 2 \cos 2x$$

Actividad formativa 8.5

1. Completa la siguiente tabla sabiendo que $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones para las cuales sus derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ existen.

Regla de derivación	Fórmula de derivación
Derivada de una constante por una función	$[cf(x)]' =$
Derivada de la suma de dos funciones	$[f(x) + g(x)]' =$
Derivada de la resta de dos funciones	$[f(x) - g(x)]' =$
Derivada del producto de dos funciones	$[f(x) \cdot g(x)]' =$
Derivada del cociente de funciones, $g(x) \neq 0$	$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' =$
Regla de la cadena, $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$	$(f \circ g)'(x) =$

Actividad formativa 8.6

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3(x^2 + 2x - 1)$

b) $f(x) = (5x)(3x^2)$

c) $g(x) = (x + 5)(x - 5)$

d) $h(t) = e^t \ln t$

e) $u(x) = (7x^2 - 3)^5$

f) $f(x) = (7x^3 - 4x^2 - x)^4$

g) $v(x) = \dfrac{2x + 4}{x - 1}$

h) $u(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

i) $g(t) = \text{sen } (t^2 - 2t)$

j) $h(t) = \tan (2t + 1)$

EVALUACIÓN FORMATIVA 8.1

1. Completa la siguiente tabla.

Función	Regla de derivación	Nombre de la regla	Derivada de la función
$f(x) = 5x^2$			$f'(x) = 10x$
$f(x) = e^x \text{ sen } x$			
$y = (8x^2 - 3)^3$	$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$		
$y = \frac{4}{6x - 2}$		Derivada de un cociente	

2. Calcula la derivada de las siguientes funciones aplicando las reglas de derivación.

Función	Derivada
$f(x) = 5x^4 + 4x^3 - 3x^2$	
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5$	
$v(t) = (t^3 - 27)(t^2 + 1)$	
$g(x) = x \ln x - \text{sen } 3x$	
$h(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 2}$	
$v(x) = \ln 2x \cdot \tan (x - 1) + 7$	
$u(x) = \frac{e^{2x}}{\cos 2x}$	
$f(t) = e^t \tan t + 2t$	

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ________________________ Plantel: ______________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 8. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Demostré algunas reglas de derivación utilizando la definición de derivada. (M3-C2)			
Apliqué las reglas de derivación para calcular la derivada de diversas funciones. (M4-C3)			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 8 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Demostró algunas reglas de derivación utilizando la definición de derivada. (M3-C2)			
Aplicó las reglas de derivación para calcular la derivada de diversas funciones. (M4-C3)			

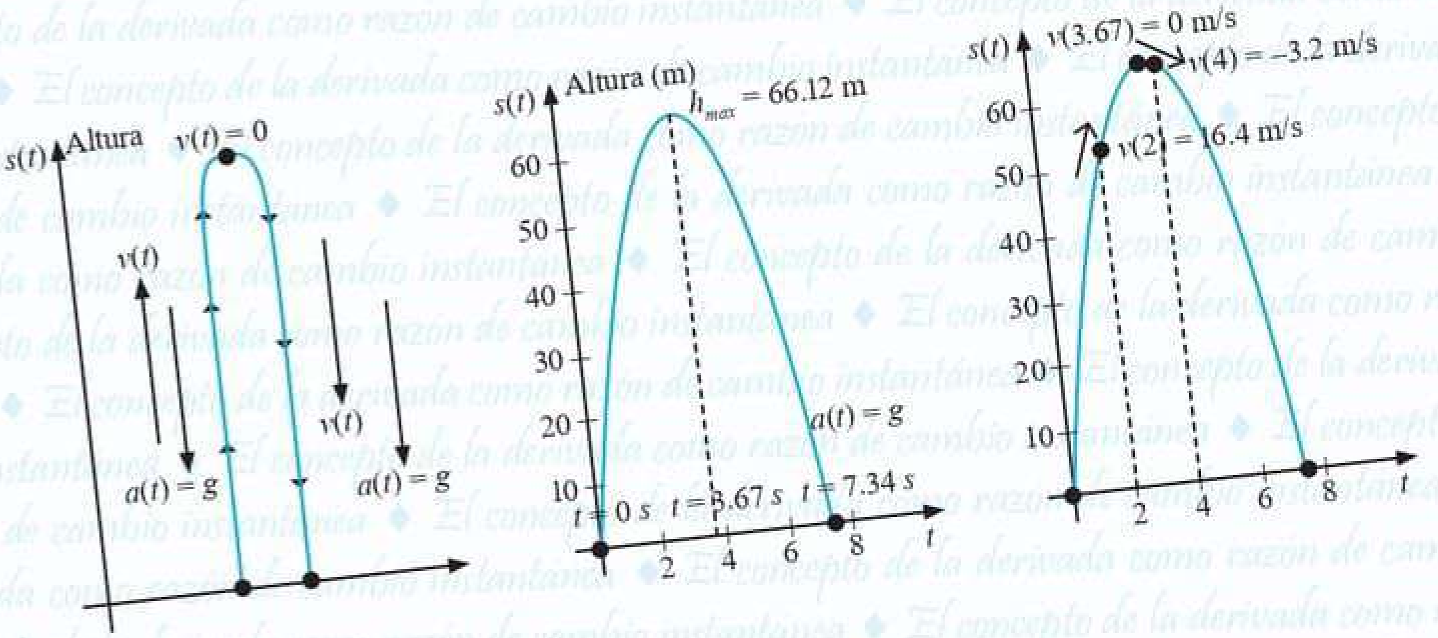
____

Nombre y firma de quien coevalúa

El concepto de la derivada como razón de cambio instantánea

$$v(t) = \frac{d}{dt}s(t) = \frac{d}{dt}(-4.9t^2 + 36t) = -9.8t + 36$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}(-9.8t + 36) = -9.8$$



Progresión de aprendizaje 9

Selecciona una problemática en la que el cambio sea un factor fundamental en su estudio para aplicar el concepto de la derivada como razón de cambio instantánea.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C3 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 9.1

Analiza los enunciados siguientes y subraya la respuesta correcta:

1. Concepto que describe el valor numérico al cual se aproxima una función a medida que la variable independiente se aproxima por ambos lados a un valor dado.

   a) Valor de la función b) Ordenada al origen

   c) Límite de la función d) Ceros de la función

2. Representación matemática de una razón de cambio promedio.

   a) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ b) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

   c) $y = f(x)$ d) $\frac{dy}{dx}$

3. Representación matemática de una razón de cambio instantánea.

a) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

b) $\Delta y = y_2 - y_1$

c) $y = f(x)$

d) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

4. Expresión que define la derivada de la función $y = f(x)$.

a) $y = x^2 - 1$

b) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

c) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

d) $f(x) = 3x + 1$

5. ¿Cuál es la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto dado?
   a) La pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.
   b) El área bajo la curva en ese punto.
   c) El valor máximo de la función en ese punto.
   d) La recta que corta en dos puntos a la gráfica de la función.

6. ¿Porque es importante calcular la razón de cambio instantánea en problemas de aplicación?
   a) Para obtener una estimación aproximada de la razón de cambio.
   b) Para conocer con precisión la razón de cambio en un punto específico.
   c) Para identificar las rectas que cortan a la gráfica.

En una parcela, hay un tanque cilíndrico destinado a acumular agua para riego. El tanque se ha averiado y se está vaciando a una razón constante de 2 litros por minuto. El radio del tanque es de 1 metro y la altura inicial del líquido es de 3 metros. Es necesario determinar la razón de cambio del nivel del líquido en el tanque en función del tiempo. ¿Tienes alguna herramienta que pueda ayudar a resolver este problema?

En la progresión 7, aprendiste que la derivada es un concepto clave en el cálculo, interpretado como la razón de cambio instantánea a través de dos ejemplos: la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto (interpretación geométrica) y la velocidad instantánea (interpretación física).

La derivada también puede utilizarse para calcular la velocidad a la que se llena un tanque de agua en función del caudal que lo alimenta, determinar cómo una población crece o decrece con el tiempo, y analizar la velocidad con la que aumentan o disminuyen la producción y los costos. En resumen, la derivada representa la razón o tasa de cambio en un valor específico, un aspecto fundamental para estudiar y comprender el comportamiento de funciones y fenómenos variables.

La pendiente de la recta tangente

La derivada te permite calcular la pendiente de la tangente m_t a la curva en el punto x_0,

$$m_t = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

La derivada de la función puede resultar una expresión matemática también variable (en función de x), lo que significa que la gráfica de la función presenta pendientes variables para diferentes valores de x.

Ejemplo formativo 9.1

1. Determina la pendiente de la tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 4x + 3$ en el valor $x_0 = 3$.

Resolución

La derivada de la función $y = x^2 - 4x + 3$ es $y' = \frac{dy}{dx} = 2x - 4$.

Esta derivada representa la pendiente de las tangentes a la gráfica de la función para cualquier valor de x.

$$m_t = \frac{dy}{dx} = 2x - 4$$

La pendiente de la tangente a la gráfica en un valor específico, por ejemplo $x_0 = 3$ es $m_t = 2(3) - 4 = 6 - 4 = 2$.

En $x_0 = 3$, la pendiente de la tangente a la gráfica es $m_t = 2$.

Actividad formativa 9.1

1. Dadas las siguientes funciones, determina la pendiente de la recta tangente a la gráfica en los valores indicados en cada caso e interpreta el resultado obtenido.
   a) $f(x) = x^3 - 4$, en $x_0 = 1$.
   b) $s(t) = 4t - t^2$, en $t_0 = 2$.

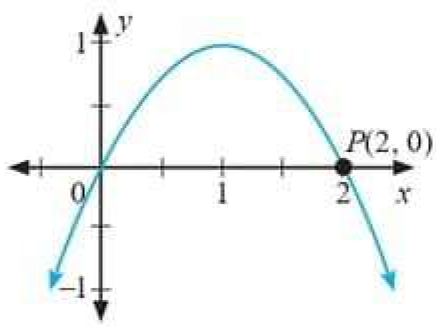
La ecuación de la recta tangente

Si la derivada de una función representa la pendiente de la tangente a la curva de la función en cualquier punto dado, entonces es posible utilizar esta condición para determinar la ecuación de cualquier recta tangente a la curva de la función en un punto específico de interés. Para ello, se sustituye, la pendiente calculada en el punto de interés junto con las coordenadas de ese punto, en la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente, $y - y_1 = m(x - x_1)$, donde m es la pendiente de la recta tangente y (x_1, y_1) son las coordenadas del punto de tangencia.

La relevancia de determinar la ecuación de la recta tangente radica en que permite su representación gráfica, lo cual facilita la visualización de la interacción de la función con dicha tangente al observar ambas gráficas conjuntamente.

Ejemplo formativo 9.2

1. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 2x - x^2$, en el punto $P(2, 0)$. ¿Cómo será la representación gráfica de esta situación?



Resolución

La función $y = 2x - x^2$, se puede identificar como una parábola que abre hacia abajo, como se muestra en la figura de arriba.

El punto $P(2, 0)$, es el punto de tangencia de la recta y la parábola.

La pendiente de la recta tangente (o de la curva), es la derivada de la función, esto es

$$m = \frac{d}{dx} = (2x - x^2) = 2 - 2x$$

La pendiente de la recta tangente en $P(2, 0)$ la obtienes sustituyendo $x = 2$, en la expresión obtenida para la pendiente, $m = 2 - 2x$, así $m = 2 - 2(2) = 2 - 4 = -2$.

Entonces, en $P(2,0)$ la pendiente de la recta tangente es $m = -2$.

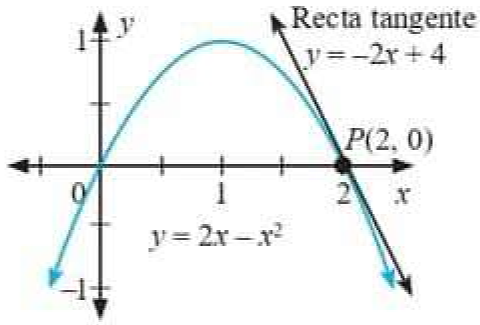
Determina la ecuación de la recta tangente con $m = -2$ y $P(2, 0)$, sustituyendo en la ecuación de la recta en la forma de punto-pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 0 = -2(x - 2)$$

La ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto $P(2, 0)$ es

$$y = -2x + 4 \text{ o } 2x + y - 4 = 0$$

La representación gráfica de esta situación se muestra en la figura de abajo.



Actividad formativa 9.2

1. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^3 + 1$, en el punto $P(1, 2)$y representa gráficamente esta situación.

Velocidad y aceleración

En la progresión 7, aprendiste a resolver el problema de la velocidad y la aceleración instantánea utilizando la derivada. Recuerda que

$$v = \frac{d}{t} \text{ o bien } v = \frac{s - s_0}{t - t_0}$$

Esta representación toma la distancia como dos puntos asociados a la posición y el tiempo como dos momentos determinados.

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ o bien } v(t) = \frac{d}{dt}s(t)$$

$$a = \frac{dv}{dt} \text{ o bien } a(t) = \frac{d}{dt}v(t)$$

También se puede calcular la aceleración como $a(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}s(t)\right) = \frac{d^2}{dt^2}s(t)$ o de manera más sencilla como $a(t) = s''(t)$, donde $s''(t)$ denota la segunda derivada de la posición respecto al tiempo. Esto es posible porque la primera derivada genera una nueva función, que también puede ser derivada.

Ejemplo formativo 9.3

1. Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba y su trayectoria está dada por la función de desplazamiento $s(t) = -4.9t^2 + 36t$, donde $s(t)$ esta medido en metros y t en segundos. Calcula:
   a) La velocidad y la aceleración en los instantes de tiempo $t = 2$ y $t = 4$ (segundos).
   b) La altura máxima alcanzada.
   c) El tiempo t que tarda en caer al suelo y la velocidad de su caída.

Resolución

Datos: la función que representa el desplazamiento vertical de la piedra es

$$s(t) = -4.9t^2 + 36t$$

El problema involucra la velocidad y aceleración como razones de cambio instantáneas a partir de la función desplazamiento $s(t)$.

La velocidad es $v(t) = \frac{ds}{dt}$ o $v(t) = \frac{d}{dt}s(t)$

La aceleración es $a(t) = \frac{dv}{dt}$ o $a(t) = \frac{d}{dt}v(t)$ o $a(t) = \frac{d^2}{dt}s(t)$

a) La velocidad y la aceleración en los instantes de tiempo $t = 2$ y $t = 4$ (segundos).

$$v(t) = \frac{d}{dt}s(t) = \frac{d}{dt}(-4.9t^2 + 36t) = -4.9(2t) + 36 = -9.8t + 36$$

La ecuación de la velocidad es $v(t) = -9.8t + 36$ m/s

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}(-9.8t + 36t) = -9.8$$

La ecuación de la aceleración es $a(t) = -9.8$ m/s^2. La aceleración es una constante (la gravedad).

En $t = 2$, la velocidad es $v(2) = -9.8(2) + 36 = -19.6 + 36 = 16.4$

$$v(2) = 16.4$$

La velocidad a los dos segundos es 16.4 m/s.

La aceleración es $a(2) = -9.8$ m/s^2. Este resultado significa que hay una desaceleración.

En $t = 4$, la velocidad es $v(4) = -9.8(4) + 36 = -39.2 + 36 = -3.2$

$v(4) = -3.2$ m/s significa que la piedra se desplaza hacia abajo.

La velocidad a los cuatro segundos es 3.2 m/s

La aceleración es $a(4) = -9.8$ m/s^2. Hay una desaceleración, lo cual significa que en cada segundo la velocidad disminuye en 9.8 m/s.

b) La altura máxima alcanzada.

Se sabe que, en la altura máxima, la velocidad de la piedra es cero metros por segundo.

Se establece la condición $v(t) = -9.8t + 36 = 0$, al despejar t se tiene el tiempo en donde se alcanza la altura máxima.

$$-9.8t + 36 = 0$$
$$-9.8t = -36$$
$$t = \frac{-36}{-9.8}$$
$$t = 3.67$$

La posición en t = 3.67 es la altura máxima y puedes calcularla con la ecuación del desplazamiento $s(t) = -4.9t^2 + 36t$.

$$s(3.67) = -4.9(3.67)^2 + 36(3.67) = -4.9(13.47) + 36(3.67) = -66.0 + 132.12 = 66.12$$

La altura máxima es $s(3.67) = 66.12$ m.

c) El tiempo t que tarda en caer al suelo y la velocidad de su caída.

Cuando la piedra cae al suelo se dice que su posición es cero, $s(t) = -4.9t^2 + 36t = 0$, factorizando:

$$-4.9t^2 + 36t = t(-4.9t + 36) = 0, \text{ de donde}$$

$$t_1 = 0 \text{ o } -4.9t_2 + 36 = 0 \Rightarrow -4.9t_2 = -36 \Rightarrow t_2 = \frac{-36}{-4.9} \Rightarrow t_2 \approx 7.34$$

De estos resultados, puedes interpretar que la piedra cae al suelo en el instante de tiempo $t_2 = 7.34$ s, mientras que en $t_1 = 0$ s, la piedra es lanzada.

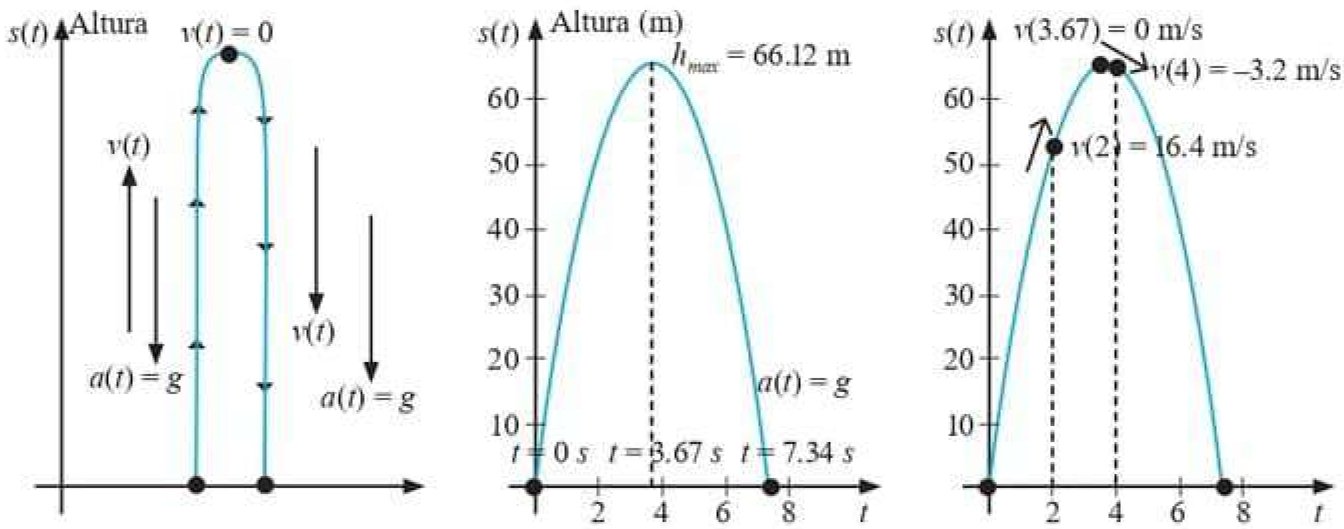
La velocidad de la piedra en su caída (t_2 = 7.34 s), puedes calcularla utilizando la ecuación obtenida para la velocidad.

$$v(7.34) = -9.8(7.34) + 36 = -71.93 + 36 = -35.93$$

La velocidad de caída es $v(7.34) = -35.93$ m/s. Esto significa que la piedra viaja hacia abajo.

La velocidad en el instante $t_2 \approx 7.34$ s es 35.93 m/s.

En la figura de abajo se muestra la representación gráfica del problema.



Actividad formativa 9.3

1. En un experimento, la posición (en metros) de una partícula que viaja a gran velocidad en una recta horizontal se puede determinar por medio de la ecuación

$$s(t) = t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 10t + 5$$

Determina la posición, la velocidad y la aceleración de dicha partícula, cuando han transcurrido tres segundos.

La derivada es una herramienta fundamental en el análisis y modelado de diferentes procesos, como el llenado y vaciado de tanques, que son ampliamente utilizados en la Ingeniería Química y otros campos afines.

Ejemplo formativo 9.4

1. Un recipiente cilíndrico de 2 m de altura y 1 m de radio se llena con agua a una velocidad constante de 0.5 m³/min. Calcula la razón de cambio de la altura del nivel de agua en el recipiente cuando el nivel alcanza los 1.5 m.

Resolución

Datos:

- Radio del recipiente: $r = 1$ m
- Altura del recipiente: $h = 2$ m
- Razón de cambio del volumen con respecto al tiempo: $\frac{dV}{dt} = 0.5$ m³/min
- Nivel de agua alcanzado: $h = 1.5$ m

Para resolver el problema ten en cuenta que la razón de cambio de la altura del nivel de agua se calcula mediante la derivada de la altura con respecto al tiempo.

Como $V = A_B \cdot h \Rightarrow \frac{dV}{dt} = A_B \cdot \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{A_B}$

Donde:

- $\frac{dh}{dt}$ es la razón de cambio de la altura con respecto al tiempo.
- $\frac{dV}{dt}$ es la razón de cambio del volumen con respecto al tiempo.
- A_B es el área de la base del recipiente.

Sustituyendo los valores: $A_B = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (1)^2 = \pi$ m²

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0.5}{\pi} \approx 0.159 \text{ m/min}$$

Por lo tanto, la razón de cambio de la altura del nivel de agua cuando el nivel alcanza los 1.5 m es de aproximadamente 0.159 m/min.

Observación: como la ecuación del volumen es lineal en h, la razón de cambio de la altura es constante y no depende del valor de h, por lo que sigue siendo $\frac{0.5}{\pi}$ m/min cuando el nivel alcanza los 1.5 m.

Actividad formativa 9.4

1. Un tanque cilíndrico se está vaciando a una razón constante de dos litros por minuto. El radio del tanque es de un metro. Encuentra la razón de cambio del nivel del líquido en el tanque en función del tiempo.

Ejemplo formativo 9.5

1. Una empresa de manufactura produce un producto y la función que determina la cantidad producida (en unidades) es: $P(t) = 500 + 30t - 2t^2$, donde t se mide en días.

   a) Encuentra la función que determina la razón de cambio instantánea.

   b) Calcula el valor de la razón de cambio para $t = 5$, $t = 10$, $t = 15$ y $t = 20$ días.

   c) Interpreta los resultados obtenidos.

Resolución

a) La razón de cambio instantánea se calcula mediante la derivada de la función $P(t)$:

$$P'(t) = 30 - 4t$$

b) Sustituyendo los valores de t: para $t = 5$ días, $P'(5) = 30 - 4(5) = 10$. Para $t = 10$ días, $P'(10) = 30 - 4(10) = -10$. Para $t = 15$ días, $P'(15) = 30 - 4(15) = -30$. Para $t = 20$ días, $P'(20) = 30 - 4(20) = -50$.

c) Interpretación de los resultados:

- Para $t = 5$ días, la razón de cambio instantánea es 10 unidades/día, lo que significa que la producción aumenta a una tasa de 10 unidades por día.
- Para $t = 10$ días, la razón de cambio instantánea es –10 unidades/día, lo que significa que la producción disminuye a una tasa de 10 unidades por día.
- Para $t = 15$ días, la razón de cambio instantánea es –30 unidades/día, lo que significa que la producción disminuye a una tasa de 30 unidades por día.
- Para $t = 20$ días, la razón de cambio instantánea es –50 unidades/día, lo que significa que la producción disminuye a una tasa de 50 unidades por día.

Actividad formativa 9.5

1. Un cultivo de bacterias varía con relación al tiempo de acuerdo con la expresión

$$N(t) = 100 + 15t - t^2$$

   a) ¿Cuál es la velocidad de crecimiento en el instante $t = 10$ min?

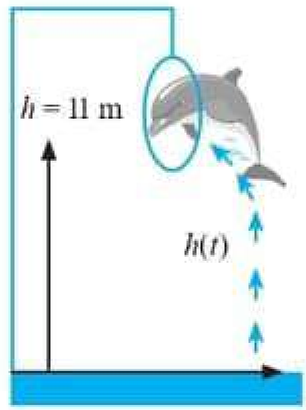
   b) Interpreta el resultado obtenido.

◇ EVALUACIÓN FORMATIVA 9.1

1. Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$, determina:
   a) La ecuación que representa la pendiente.
   b) Los valores de x para los cuales la pendiente es cero.
   c) Traza la gráfica de la función con ayuda de un graficador e interpreta el inciso b).

2. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^3 - x$, en el punto $P(1,0)$ y traza una representación gráfica de esta situación.

3. Un delfín del acuario salta del agua como se muestra en la figura de la derecha para alcanzar a cruzar un aro que se encuentra a 11 metros de altura y se desplaza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 15 m/s. La posición del delfín $h(t)$ (en metros) sobre la superficie del agua después de t segundos está dada por $h(t) = 15t - 4.9t^2$. Calcula:



   a) La velocidad en los instantes de tiempo $t = 1$ y $t = 2$ (segundos).
   b) La altura máxima alcanzada y determina si alcanza el aro.
   c) El tiempo t que tarda el salto del delfín y la velocidad de su caída.

4. Un tanque cónico tiene una base circular de radio dos metros y una altura de cinco metros. El tanque se está llenando a una tasa constante de tres litros por minuto. Encuentra la razón de cambio del nivel del líquido en el tanque en función del tiempo.

5. Una empresa de servicios informáticos realiza un estudio sobre el número de clientes que utilizan su servicio en función del tiempo. La función que describe el número de clientes (en miles) es: $C(t) = 20 - 5t - t^2$, donde t se mide en semanas.
   a) Encuentra la función que determina la razón de cambio instantánea.
   b) Calcula el valor de la razón de cambio para $t = 3$, $t = 6$, $t = 9$ y $t = 12$ semanas.
   c) Interpreta los resultados obtenidos.

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ____________________________ Plantel: __________________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 9. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Construí modelos aplicando el concepto de derivada como razón de cambio para resolver problemas matemáticos, físicos y de ingeniería. (M2-C3)			

Coevaluación para el aprendizaje

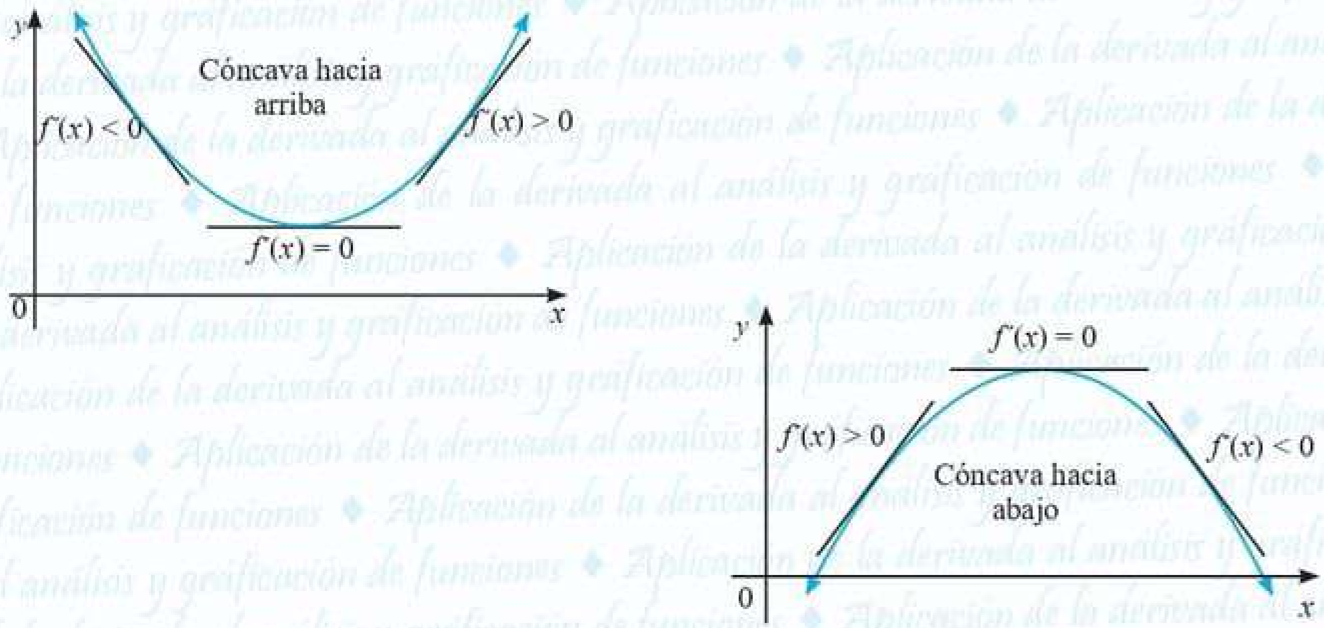
Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 9 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Construyó modelos aplicando el concepto de derivada como razón de cambio para resolver problemas matemáticos, físicos y de ingeniería. (M2-C3)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Aplicación de la derivada al análisis y graficación de funciones



Progresión de aprendizaje 10

Explica y socializa el papel de la derivada para analizar una función (donde crece/decrece, máximos/mínimos locales, concavidades) y traza su gráfica.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M3-C1 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	A			
	C			
	H			
M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	A			
	C			
	H			
M2-C4 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			

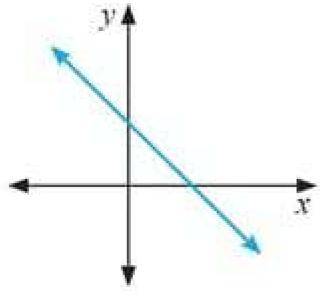
EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 10.1

1. A partir de la gráfica de la derecha identifica si la pendiente es mayor, igual o menor que cero.

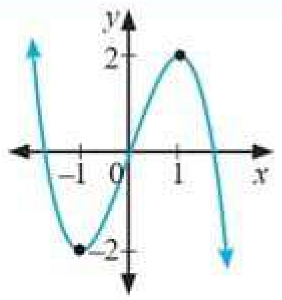
   a) $m > 0$

   b) $m < 0$

   c) $m = 0$



2. Identifica si las siguientes propiedades son falsas o verdaderas en correspondencia con la gráfica.



Propiedad	V	F
Creciente en intervalo $(-1, 1)$		
$f(1) = 2$ es un valor mínimo local en $x = 1$.		
Tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$.		
Es cóncava hacia arriba en el intervalo $(0, \infty)$.		

3. La derivada de la función $f(x) = 2x^3 + 2x$ es:

a) $f'(x) = 5x + 2$ b) $f'(x) = 3x + 1$

c) $f'(x) = 6x^2 + 2$ d) $f'(x) = 3x^2 + 1$

Crecimiento y decrecimiento de funciones

El estudio de la monotonía de una función permite entender cómo varía una variable en relación con otra, por ejemplo, como varía la distancia a través del tiempo. Los conceptos representados en la Figura 10.1, sobre función creciente, función decreciente y función constante los definimos como:

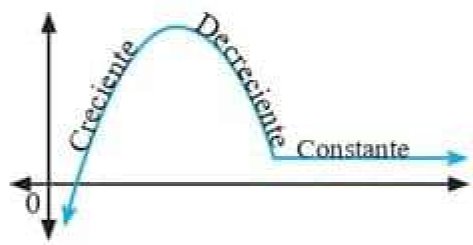
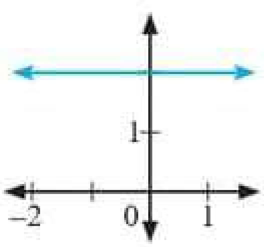
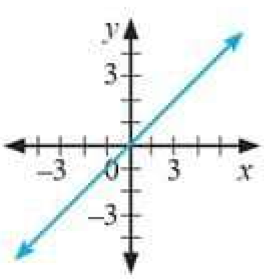
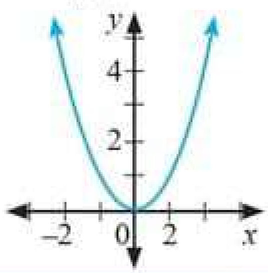
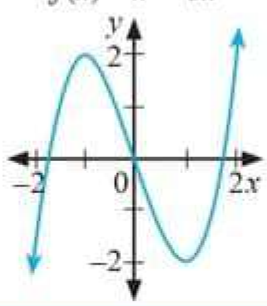


Figura 10.1. Monotonía de una función.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2025).

- **Función creciente**. A medida que x aumenta, $f(x)$ también aumenta, es decir, si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$.
- **Función decreciente.** A medida que x aumenta, $f(x)$ disminuye, es decir, si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$.
- **Función constante.** La función $f(x)$ no cambia, aunque x aumente o disminuya, es decir, $f(x_1) = f(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in D_f$.

A continuación, conectamos la monotonía de una función con el signo de la primera derivada.

Gráfica	Monotonía	Valor de prueba	Derivada de f	Signo de f'
$f(x) = 2$ 	Constante en $(-\infty, +\infty)$	$x = 1$	$f'(x) = 0$	$f'(1) = 0$
$f(x) = x$ 	Creciente en $(-\infty, +\infty)$	$x = 0$	$f'(x) = 1$	$f'(0) = 1 > 0$

$f(x) = x^2$ 	Decreciente en $(-\infty, 0)$	$x = -1$	$f'(x) = 2x$	$f'(-1) = -2 < 0$
	Creciente en $(0, +\infty)$	$x = 2$		$f'(2) = 4 > 0$
$f(x) = x^3 - 3x$ 	Creciente en $(-\infty, -1)$	$x = -2$	$f'(x) = 3x^2 - 3$	$f'(-2) = 9 > 0$
	Decreciente en $(-1, 1)$	$x = 0$		$f'(0) = -3 < 0$
	Creciente en $(1, +\infty)$	$x = 3$		$f'(3) = 24 > 0$

De lo anterior, observamos que en el intervalo donde la función es **constante**, la primera derivada es igual a cero. Donde es **creciente**, la primera derivada es mayor que cero. Y si la función es **decreciente**, la primera derivada es menor que cero. Con base en esto establecemos el siguiente teorema para determinar de forma analítica la monotonía de una función.

Teorema de monotonía

Sea f continua en el intervalo (a, b) y derivable en (a, b).

i) Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en (a, b).

ii) Si $f'(x) = 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es constante en (a, b).

iii) Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en (a, b).

Recuerda que la primera derivada de $f(x)$ da la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$. Con base en esto, si $f'(x) < 0$ entonces la recta tangente decrece hacia la derecha, lo cual sugiere que f es decreciente (Figura 10.2a). Ahora, si $f'(x) = 0$ entonces la recta tangente es constante hacia la derecha, lo cual sugiere que f no crece ni decrece. Por último, si $f'(x) > 0$ entonces la recta tangente crece hacia la derecha, lo cual sugiere que f es creciente. Y en la Figura 10.2b está la correspondiente derivada.

a) $f(x) = x^2 + 1$ b) $f'(x) = 2x$

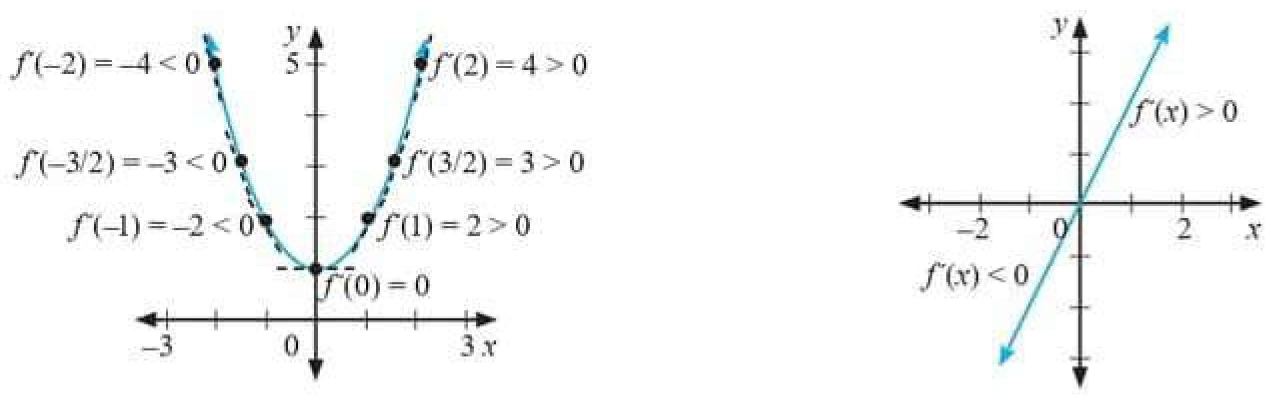


Figura 10.2. La pendiente de la recta tangente en un punto y su conexión con la monotonía de la función.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2025).

En la Figura 10.2a, al valor $x = 0$ se le llama **valor crítico**, dado que $f'(0) = 0$. Es decir, ahí la monotonía de la función $f(x)$ cambia, pasa de ser decreciente ($f'(x) < 0$) a ser creciente ($f'(x) > 0$).

Valor crítico

El número real c del dominio de $f(x)$ es un valor crítico si $f'(c)$ no existe o bien, $f'(c) = 0$.

El teorema de la monotonía es útil para analizar de forma analítica el comportamiento de una función a partir de explorar la derivada de una función en distintos intervalos. En dichos intervalos se puede identificar si la función es creciente, decreciente o constante:

1. Calcula la derivada de la función $f(x)$.
2. Iguala la derivada a cero ($f'(x) = 0$) y resuelve la ecuación para encontrar los valores críticos.
3. Usa los valores críticos obtenidos para dividir el dominio de la función en intervalos.
4. Escoge un valor o número de prueba x dentro de cada intervalo y sustituye ese valor en $f'(x)$. Esto te permitirá identificar el signo de la derivada en ese intervalo:
   - Si $f'(x) > 0$ en un intervalo, la función es creciente en ese intervalo.
   - Si $f'(x) < 0$ en un intervalo, la función es decreciente en ese intervalo.
5. Con los signos de la derivada (+ o –) en cada intervalo, determina los intervalos donde la función es creciente o decreciente.

Ejemplo formativo 10.1

1. Determina los intervalos en donde la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ es creciente o decreciente mediante el teorema de la monotonía.

Resolución

Paso 1. Deriva $f(x)$, $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Paso 2. Iguala la derivada a cero y resuelve la ecuación.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow 3x = 0 \text{ o } x - 2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = 2$

Los valores críticos son $x = 0$ y $x = 2$

Paso 3. Divide el dominio de la función en intervalos: $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$.

Paso 4. Elige un valor de prueba en cada intervalo y evalua la derivada.

Valores de prueba: $x = -1 \in (-\infty, 0)$, $x = 1 \in (0, 2)$ y $x = 3 \in (2, +\infty)$.

Derivada de f: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Signo de f' +	Signo de f' –	Signo de f' +
$f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1)$	$f'(1) = 3(1)^2 - 6(1)$	$f'(3) = 3(3)^2 - 6(3)$
$f'(-1) = 3 + 6$	$f'(1) = 3 - 6$	$f'(3) = 27 - 18$
$f'(-1) = 9 > 0$	$f'(1) = -3 < 0$	$f'(3) = 9 > 0$

$-\infty$ $f(x)$ es creciente 0 $f(x)$ es decreciente 2 $f(x)$ es creciente $+\infty$

El proceso anterior lo podemos resumir en la siguiente tabla:

Intervalo de prueba	Valor de prueba	Signo f'	Monotonia de f
$(-\infty, 0)$	$x = -1$	$f'(-1) = 9 > 0$	Creciente
$(0, 2)$	$x = 1$	$f'(1) = -3 < 0$	Decreciente
$(2, +\infty)$	$x = 3$	$f'(3) = 9 > 0$	Creciente

Paso 5. Concluye sobre los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Concluimos que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ es creciente en $(-\infty, 0)$, es decreciente en $(0, 2)$ y creciente en $(0, +\infty)$.

Actividad formativa 10.1

1. Determina los intervalos en donde cada una de las siguientes funciones es creciente o decreciente mediante el teorema de la monotonía.

   a) $f(x) = 2x - x^2$ b) $h(x) = x^3 - 3x^2$ c) $f(x) = -x^3 + 3x - 4$

   d) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ e) $h(x) = -x^4 + 6x^2 - 3$

Máximo y mínimo de una función

Conocer los intervalos en los que una función es creciente y aquellos en los que es decreciente permite identificar los puntos en los que la función cambia de creciente a decreciente o viceversa. Estos puntos de cambio se conocen como extremos locales (máximo y mínimo). Los extremos relativos ocurren únicamente en los valores de x que son valores críticos; es decir, aquellos valores en los que la derivada es cero o no está definida.

Un **máximo relativo** o local de una función $f(x)$ es un punto $P(c, f(c))$ de $f(x)$, tal que $f(c) > f(x)$ para todo x alrededor (izquierda y derecha) de c. En la Figura 10.3 se presenta un máximo relativo cuando una función deja de crecer y empieza a decrecer.

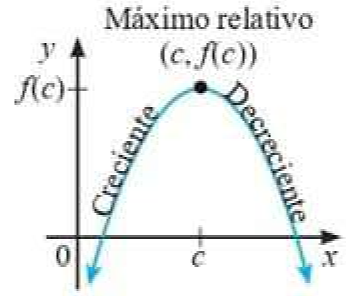


Figura 10.3. Máximo local.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2025).

Un **mínimo relativo** o local de una función $f(x)$ es un punto $P(c, f(c))$ de $f(x)$, tal que $f(c) < f(x)$ para todo x alrededor (izquierda y derecha) de c. En la Figura 10.4 se presenta un mínimo relativo cuando una función deja de decrecer y empieza a crecer.

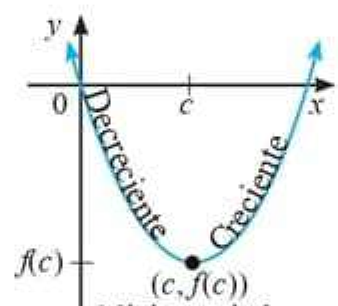
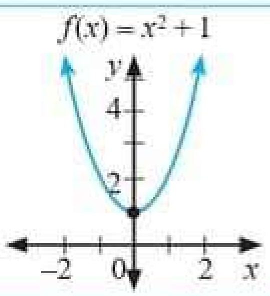
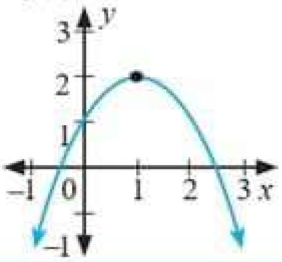


Figura 10.4. Mínimo local.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2025).

A continuación, conectamos un valor mínimo relativo o un valor máximo relativo de una función con el cambio de signo (+ o –) de la primera derivada.

Gráfica	Extremos locales	Número de prueba cerca de x	Derivada de f	Signo de f'
	$f(0) = 1$ es un valor mínimo relativo en $x = 0$.	-1	$f'(x) = 2x$	$f'(-1) = 2(-1) = -2 < 0$
		1		$f'(1) = 2(1) = 2 > 0$

$f(x) = -x^2 + 2x + 1$ 	$f(1) = 2$ es un valor máximo relativo en $x = 1$.	0 2	$f'(x) = -2x + 2$	$f'(0) = -2(0) + 2 = 2 > 0$ $f'(2) = -2(2) + 2 = -2 < 0$

De lo anterior, observamos que cuando el valor de $f'(x)$ de ser menor que cero ($f'(x) < 0$) pasa a ser mayor que cero ($f'(x) > 0$) tenemos un valor mínimo relativo. Y que cuando el valor de $f'(x)$ de ser mayor que cero ($f'(x) > 0$) pasa a ser menor que cero ($f'(x) < 0$) tenemos un valor máximo relativo. Con base en esto establecemos el criterio de la primera derivada para determinar de forma analítica los extremos relativos de una función.

Criterio de la primera derivada para valores extremos relativos

Si $f'(c) > 0$ a la izquierda de c y $f'(c) < 0$ a la derecha de c, entonces la función tiene un máximo relativo en c y es $f(c)$.

Si $f'(c) < 0$ a la izquierda de c y $f'(c) > 0$ a la derecha de c, entonces la función tiene un mínimo relativo en c y es $f(c)$.

Ejemplo formativo 10.2

1. Determina los máximos relativos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

Resolución

Retomamos la tabla del paso 4 del Ejemplo formativo 10.1.

Intervalo de prueba	Valor de prueba	Signo de f'	Monotonia
$(-\infty, 0)$	$x = -1$	$f'(-1) = 9 > 0$	Creciente
$(0, 2)$	$x = 1$	$f'(1) = -3 < 0$	Decreciente
$(2, +\infty)$	$x = 3$	$f'(3) = 9 > 0$	Creciente

Con base a los resultados de la tabla anterior, concluye sobre los valores extremos relativos.

De acuerdo con los resultados de la tabla:

- En, $x = 0$, $f(x)$ tiene un valor máximo relativo y es
$$f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 + 4 = 0 - 0 + 4 = 4.$$
- En $x = 2$, $f(x)$ tiene un valor mínimo relativo y es
$$f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0.$$

Otro criterio que puedes usar para determinar los valores extremos relativos es el criterio de la segunda derivada.

Criterio de la segunda derivada para valores extremos relativos

Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$ entonces la función f alcanza un máximo relativo en el valor crítico c.

Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$ entonces la función f alcanza un mínimo relativo en el valor crítico c.

Para profundizar sobre el cálculo de máximos y mínimos, consulta los videos en los códigos QR 10.1 y QR 10.2 de la siguiente página.

QR 10.1. Video del profe Alex, máximos y mínimos de una función | ejemplo 1. (Parzibyte, 2025).

QR 10.2.Video del profe Alex, máximos y mínimos de una función | ejemplo 2. (Parzibyte, 2025).

Actividad formativa 10.2

1. Para las siguientes funciones determina los máximos y mínimos usando el criterio de la primera derivada para valores extremos.

   a) $f(x) = 2x - x^2$

   b) $h(x) = x^3 - 3x^2$

   c) $f(x) = -x^3 + 3x - 4$

   d) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

   e) $h(x) = -x^4 + 6x^2 - 3$

Concavidad y puntos de inflexión

Cuando la derivada $f'(x)$ es creciente al movernos de izquierda a derecha (es decir, cuando la pendiente de la recta tangente aumenta), la gráfica de la función se curva hacia arriba, como se muestra en la Figura 10.5. En este caso, decimos que la función es cóncava hacia arriba.

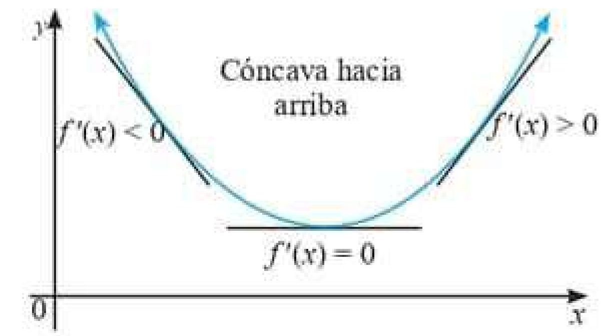


Figura 10.5. Función cóncava hacia arriba.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2025).

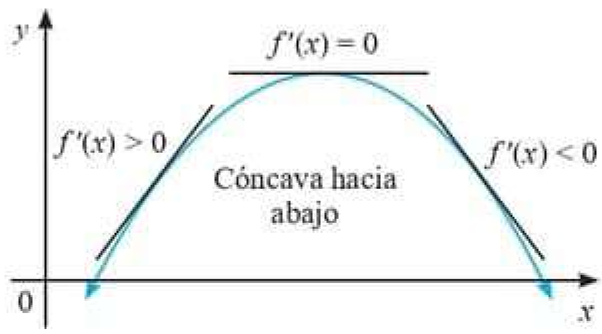
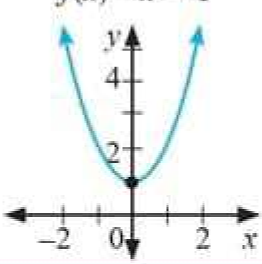


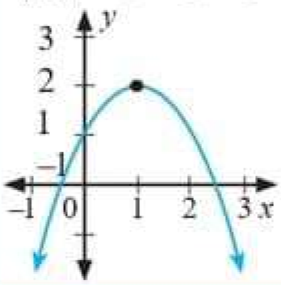
Figura 10.6. Función cóncava hacia abajo.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2025).

Y cuando la derivada $f'(x)$ es decreciente al movernos de izquierda a derecha (es decir, cuando la pendiente de la recta tangente disminuye), la gráfica de la función se curva hacia abajo, como se muestra en la Figura 10.6. En este caso, decimos que la función es cóncava hacia abajo.

A continuación, conectamos la concavidad de una función con el signo (+ o –) de la segunda derivada.

Gráfica	Concavidad de f	Número de prueba	Valor de $f'(x) = 2x$	Signo de $f''(x) = 2$
$f(x) = x^2 + 1$ 	Cóncava hacia arriba en $(-\infty, +\infty)$.	$x = -1$	$f'(-1) = 2(-1) = -2$	$f''(-1) = 2 > 0$
		$x = 0$	$f'(0) = 2(0) = 0$	$f''(0) = 2 > 0$
		$x = 2$	$f'(2) = 2(2) = 4$	$f''(0) = 2 > 0$

Observa que la derivada de la función $f(x) = x^2 + 1$ es $f'(x) = 2x$, y al evaluarla en los números de prueba $x = -1, 0, 2$, el valor de $f(x)$ va aumentando. En consecuencia, si el valor de $f'(x)$ va aumentando, la función $f(x)$ es cóncava hacia arriba. Además, el signo de $f''(x)$ es positivo (+).

Gráfica	Concavidad de f	Número de prueba	Valor de $f'(x) = -2x + 2$	Signo de $f''(x) = -2$
$f(x) = -x^2 + 2x + 1$ 	Cóncava hacia abajo en $(-\infty, +\infty)$.	$x = -3$	$f'(-3) = -2(-3) + 2 = 8$	$f''(-3) = -2 < 0$
		$x = -2$	$f'(-2) = -2(-2) + 2 = 6$	$f''(-2) = -2 < 0$
		$x = 2$	$f'(2) = -2(2) + 2 = -2$	$f''(2) = -2 < 0$

También observa, que la derivada de la función $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ es $f'(x) = -2x + 2$, al evaluarla en los números de prueba $x = -3, -2, 2$, el valor de $f'(x)$ va disminuyendo. En consecuencia, si el valor de $f'(x)$ va decreciendo, la función $f(x)$ es cóncava hacia abajo. Además, el signo de $f''(x)$ es negativo (–). Con base en esto establecemos el criterio de la segunda derivada para determinar de forma analítica la concavidad de una función.

Criterio de la segunda derivada para la concavidad

Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces la función f es cóncava hacia abajo en (a, b).

Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces la función f es cóncava hacia arriba en (a, b).

Un punto en el que la gráfica de una función cambia de concavidad se llama **punto de inflexión**, como se muestra en la Figura 10.7.

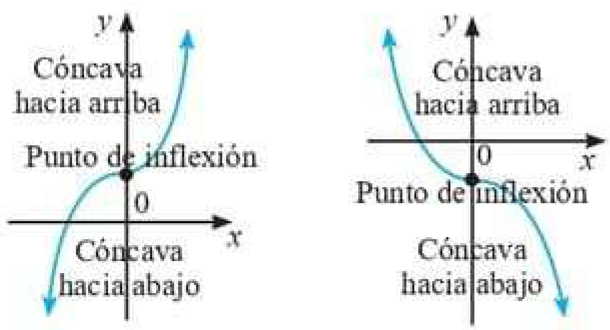


Figura 10.7. Punto de inflexión.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2025).

Punto de inflexión

Si la gráfica de f cambia de concavidad en $x = c$, con $c \in (a, b)$, es decir, la gráfica de f es cóncava hacia abajo a un lado de c y cóncava hacia arriba al otro lado o viceversa, entonces, el punto $P(c, f(c))$ se llama punto de inflexión de f.

Ejemplo formativo 10.3

1. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$:
   a) Determina los intervalos de concavidad mediante el criterio de la segunda derivada para la concavidad.
   b) Determina el punto de inflexión.

Resolución

a) Determina los intervalos de concavidad mediante el criterio de la segunda derivada para la concavidad.

Paso 1. Calcula $f''(x)$, $f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f''(x) = 6x - 6$.

Paso 2. Determina los valores de x para los cuales $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1$$

Paso 3. Establece los intervalos de prueba utilizando el valor crítico $x = 1$.

Los intervalos de prueba son: $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$.

Paso 4. Determina el signo de $f''(x)$ en cada intervalo.

Intervalo de prueba	Valor de prueba	Signo de f''	Concavidad de f
$(-\infty, 1)$	$x = 0$	$f''(0) = 6(0) - 6 = -6 < 0$	Cóncava hacia abajo
$(1, +\infty)$	$x = 2$	$f''(2) = 6(2) - 6 = 6 > 0$	Cóncava hacia arriba

De acuerdo con lo anterior, $f(x)$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, 1)$ y cóncava hacia arriba en el intervalo $(1, +\infty)$.

b) Determina el punto de inflexión.

Dado que el sentido de la concavidad de la función f cambia alrededor de $x = 1$, podemos afirmar que en $x = 1$ hay un punto de inflexión.

$$f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 4 = 1 - 3 + 4 = 2$$

El punto de inflexión es $(1, 2)$.

Actividad formativa 10.3

1. Determina los intervalos de concavidad (usando el criterio de la segunda derivada para la concavidad) y puntos de inflexión (si existen) de las siguientes funciones. Apóyate en el código QR 10.3.

a) $f(x) = 2x - x^2$

b) $h(x) = x^3 - 3x^2$

c) $f(x) = -x^3 + 3x - 4$

d) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

e) $h(x) = -x^4 + 6x^2 - 3$

QR 10.3. Video concavidad y puntos de inflexión. (Parzibyte, 2025).

Gráfica de una función

Para trazar la gráfica de una función debes analizar sus características claves, ya que esto proporciona una representación visual precisa de su comportamiento. Este proceso incluye identificar los valores críticos, aquellos puntos donde la derivada de la función es cero o no existe, y que pueden indicar máximos o mínimos relativos. Además, es necesario determinar los intervalos de crecimiento o decrecimiento, que describen cómo varía la función en diferentes intervalos de su dominio. Los puntos de inflexión, donde la concavidad de la función cambia, revelan información sobre la curvatura de la gráfica y ayudan a comprender mejor su forma general. Finalmente, analizar la concavidad te permite identificar si la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo en cada intervalo, proporcionando una visión detallada que facilita el trazado de su gráfica.

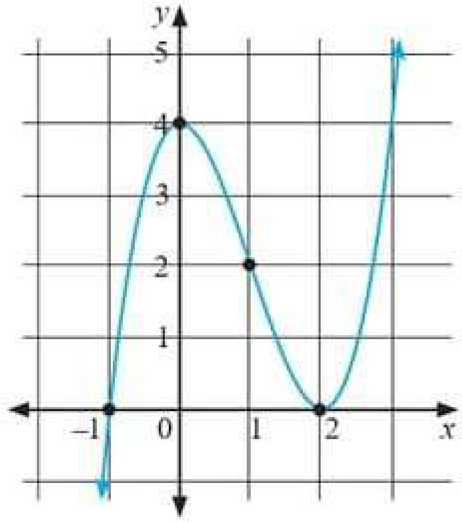
Para trazar la gráfica de una función de manera precisa, debes seguir los siguientes pasos, que implican un análisis detallado de sus características y comportamiento:

1. Encuentra los valores críticos.

2. Determina los intervalos de crecimiento.
3. Encuentra los puntos de inflexión.
4. Analiza los intervalos de concavidad.
5. Combina la información para trazar la gráfica.

Ejemplo formativo 10.4

1. Traza la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ considerando los valores críticos, intervalos de crecimiento o decrecimiento, puntos de inflexión y concavidad.



Resolución

Paso 1. Los valores críticos de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ son $x = 0$ y $x = 2$.

Paso 2. La función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ es creciente en $(-\infty, 0)$, es decreciente en $(0, 2)$ y creciente en $(0, +\infty)$.

Paso 3. La función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ tiene un punto de inflexión en $(1, 2)$.

Paso 4. La función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, 1)$; y cóncava hacia abajo en el intervalo $(1, +\infty)$.

Paso 5. Grafica la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. La gráfica resultante se muestra a la derecha.

Actividad formativa 10.4

1. Traza la gráfica de las siguientes funciones considerando los valores críticos, intervalos de crecimiento o decrecimiento, extremos locales, puntos de inflexión y concavidad.

   a) $f(x) = 2x - x^2$

   b) $h(x) = x^3 - 3x^2$

   c) $f(x) = -x^3 + 3x - 4$

   d) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

   e) $h(x) = -x^4 + 6x^2 - 3$

EVALUACIÓN FORMATIVA 10.1

1. Traza la gráfica de las siguientes funciones considerando los valores críticos, intervalos de crecimiento o decrecimiento, extremos locales, puntos de inflexión y concavidad.

   a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

   b) $g(x) = -x^4 + 4x^3 + 2$

   c) $h(x) = 3x^5 - 5x^3 - 1$

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ______________________ Plantel: ______________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 10. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Comprobé el cálculo de los valores extremos relativos mediante el criterio de la primera derivada para valores extremos. (M3-C1)			
Argumenté sobre la aplicación del criterio de la segunda derivada para analizar la concavidad de una función. (M4-C2)			
Socialicé con mis compañeros de equipo el proceso para esbozar la gráfica de una función. (M2-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

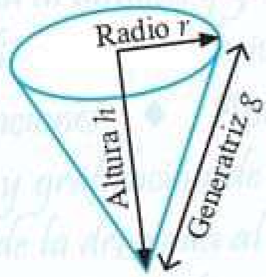
Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 10 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Comprobó el cálculo de los valores extremos relativos mediante el criterio de la primera derivada para valores extremos. (M3-C1)			
Argumentó sobre la aplicación del criterio de la segunda derivada para analizar la concavidad de una función. (M4-C2)			
Socializó con mis compañeros de equipo el proceso para esbozar la gráfica de una función. (M2-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Modelación de funciones derivables y problemas de optimización



$$V(h) = \frac{\pi r^2\, h}{3} = \frac{\pi(g^2 - h^2)h}{3}$$

$$V'(h) = \left(\frac{\pi(g^2 - h^2)h}{3}\right)'$$

Progresión de aprendizaje 11

Resuelve problemas de su entorno o de otras áreas del conocimiento empleando funciones y aplicando la derivada (por ejemplo, problemas de optimización), organiza su procedimiento y lo somete a debate.

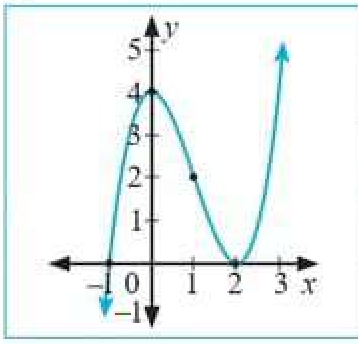
Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	A			
	C			
	H			
M4-C3 Construye y plantea posibles soluciones a problemas de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	A			
	C			
	H			
M2-C4 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 11.1

1. Relaciona cada función con su derivada.

a) $f(x) = 3x^2 + 6x - 6$	[ ] $f'(x) = 6x^2 - 6x$
b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$	[ ] $f'(x) = 6x + 6$
c) $f(x) = x^6 - 6x$	[ ] $f'(x) = 6x^5 - 6$

2. Identifica si las siguientes propiedades son falsas o verdaderas en correspondencia con la gráfica.



Propiedades	V	F
Decreciente en y en $(-\infty, 0)$ y en $(2, +\infty)$		
Creciente en $(0, 2)$		
$f(0) = 4$ es un valor máximo local en $x = 0$.		
$f(2) = 0$ es un valor mínimo local en $x = 2$.		

En el ámbito del cálculo diferencial, la derivada se posiciona como una herramienta clave para el análisis y resolución de problemas en los que se busca determinar valores óptimos, ya sean máximos o mínimos de una función que modela una situación específica.

Por ejemplo, un estudiante tiene un rectángulo de cartulina cuya área es 24 cm^2 y quiere hacer una caja sin tapa cortando cuadrados en las esquinas y doblando los lados. ¿Qué altura debe dar a la caja para obtener el volumen máximo?

Estos problemas, son conocidos como problemas de optimización, se presentan de manera recurrente en diversas disciplinas, como la física, la economía, la biología y la ingeniería, por mencionar algunas.

¿Has escuchado la palabra optimizar? ¿A qué hace referencia la optimización? Optimizar significa encontrar la mejor solución posible a un problema determinado, considerando ciertas condiciones o restricciones. En términos matemáticos, implica identificar los valores que hacen que una función alcance su máximo o mínimo, dependiendo del contexto del problema. Estos extremos representan, respectivamente, el mejor resultado que maximiza un beneficio o el que minimiza un costo, un esfuerzo o un error.

El proceso de optimización se fundamenta en analizar cómo varía una función en relación con sus variables. Aquí, la derivada juega un papel importante en este análisis, al identificar los valores críticos donde la función puede tener un valor máximo o un valor mínimo. A partir de técnicas analíticas para valores extremos, como el criterio de la primera derivada o el criterio de la segunda derivada, es posible discernir cuál es la naturaleza de estos valores críticos.

Para optimizar una función hay que seguir un conjunto de pasos estructurados para determinar los valores críticos de la variable en el que la función presenta un máximo o un mínimo. Este procedimiento puede adaptarse a diferentes situaciones y restricciones, pero en general incluye las siguientes etapas:

1. Plantea la función que se desea maximizar o minimizar en términos de variables específicas.
2. Calcula la derivada de la función definida en el paso 1.
3. Encuentra los valores críticos.
4. Determina si los valores críticos son máximos o mínimos.
5. Plantea tu conclusión.

Recuerda que la derivada de una función brinda información que permite identificar los valores críticos mediante la igualación a cero de la derivada de la función. Para establecer si en dichos valores hay un máximo o mínimo puedes usar uno de los siguientes criterios.

Criterio de la primera derivada para valores extremos.	Criterio de la segunda derivada para valores extremos.
Hay un máximo relativo en c y es $f(c)$	
Si $f'(c) > 0$ a la izquierda de c y $f'(c) < 0$ a la derecha de c	Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$
Hay un mínimo relativo en c y es $f(c)$	
Si $f'(c) < 0$ a la izquierda de c y $f'(c) > 0$ a la derecha de c	Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$

Problemas de optimización de área

Cuando hacemos referencia a un área máxima o mínima, nos referimos a la búsqueda de las dimensiones que nos darían el área más grande o pequeña de cierta figura geométrica bajo ciertas circunstancias.

Código QR 11.1. Video 2 del profe Alex, optimización. (Parzibyte, 2025).

Por ejemplo, en la Figura 11.1 observa dos rectángulos cuyo perímetro es el mismo, pero el área es diferente. Un ejemplo lo puedes ver en el video del código QR 11.1

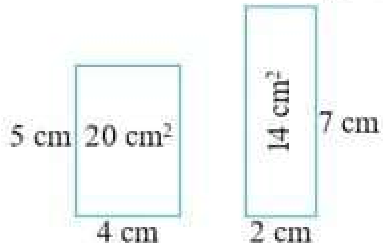


Figura 11.1. Rectángulos con perímetros iguales y áreas diferentes.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2025).

Ejemplo formativo 11.1

1. En tu escuela se va a asignar un área rectangular para el jardín, como en la figura de la derecha, considerando que el jardín quedará pegado a la barda de la escuela y que disponen de 16 m de valla para cercar los otros tres lados del jardín, determina las medidas que te brindarán una mayor superficie de jardín.

Resolución

Paso 1. Quieres hallar la máxima superficie posible sujeta a la condición de que el total de alambrado disponible para tres lados es 16 m.

Sea y el largo y x el ancho del jardín.

Según la figura del área del jardín, la cantidad total de alambrado a utilizar es $2x + y$. Por lo tanto, la ecuación de restricción es $2x + y = 16$.

Resuelve esta ecuación para y, obtienes $y = 16 - 2x$.

Así, puedes escribir el área como $A(x) = x \cdot y = x(16 - 2x) = 16x - 2x^2$.

Paso 2. Deriva la función $A(x)$, $A'(x) = 16 - 4x$.

Paso 3. Para encontrar el valor crítico, iguala a cero $A'(x)$ y resuelve la ecuación

$$16 - 4x = 0 \Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = 16/4 \Rightarrow x = 4$$

Por lo tanto, el valor crítico es $x = 4$.

Paso 4.

Utilizando el criterio de la primera derivada.

Los intervalos de prueba son $(-\infty, 4)$ y $(4, +\infty)$.

Elige los valores de prueba $x = 3$ y $x = 5$, sustitúyelos en $A'(x)$ y calcula

$$A'(3) = 16 - 4(3) = 16 - 12 = 4$$

$$A'(5) = 16 - 4(5) = 16 - 20 = -4$$

Como $A'(3) > 0$ y $A'(5) < 0$, tienes un valor máximo relativo en $x = 4$, que es

$$A(4) = 16(4) - 2(4)^2 = 32.$$

Utilizando el criterio de la segunda derivada.

Calcula la segunda derivada de la función $A(x)$, $A''(x) = -4$.

Evalúa $A''(x)$ en el valor crítico $x = 4$, $A''(4) = -4 < 0$, por lo que tienes máximo relativo en $x = 4$, que es $A(4) = 16(4) - 2(4)^2 = 32$.

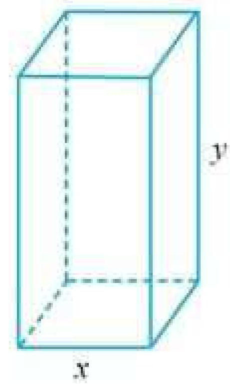
Paso 5. Para obtener la otra medida del jardín sustituye $x = 4$ en la ecuación $y = 16 - 2x$.

$$y = 16 - 2(4) = 16 - 8 = 8$$

Por lo tanto, las medidas del jardín son de 4 m por 8 m que dan un área máxima de 32 m^2.

Ejemplo formativo 11.2

1. Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada y cuya capacidad es de 8 m^3. Determina las dimensiones de la caja para que la superficie exterior sea mínima.



Resolución

Paso 1. Como la base es cuadrada, las medidas de la base son iguales.

Sea y la altura del prisma y x el lado del cuadrado de la base.

El volumen de la caja estaría dado por $V = x \cdot x \cdot y$

$$V = x^2 y$$

Considerando que el volumen es 8 m^3 y despejando la variable y tienes

$$x^2 y = 8 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{8}{x^2}$$

La función a minimizar es la de la superficie, para ello, analiza las superficies de las caras de la caja.

La cara de arriba y de abajo son iguales y su superficie está dada por $S_c = x^2$.

Las caras laterales son iguales y su superficie está dada por $S_L = xy$.

Considerando que son 4 caras laterales, una cara arriba y una cara abajo, la superficie total es

$$S = 2x^2 + 4xy$$

Sustituyendo $y = \frac{8}{x^2}$ en la ecuación anterior obtienes

$$S(x) = 2x^2 + 4x\left(\frac{8}{x^2}\right) \quad \Rightarrow \quad S(x) = 2x^2 + \frac{32}{x} \quad \Rightarrow \quad S(x) = 2x^2 + 32x^{-1}$$

Paso 2. Deriva la función $S(x)$, $S'(x) = 4x - 32x^{-2}$.

Paso 3. Para encontrar el valor crítico, iguala a cero $S'(x)$ y resuelve la ecuación

$$4x - 32x^{-2} = 0 \;\Rightarrow\; 4x - \frac{32}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; 4x^3 = 32 \;\Rightarrow\; x^3 = \frac{32}{4} \;\Rightarrow x^3 = 8 \;\Rightarrow x = 2$$

Por lo tanto, el valor crítico es $x = 2$.

Paso 4. Calcula la segunda derivada de la función $S(x)$.

$$S''(x) = 4 + \frac{64}{x^3}$$

Evalúa la segunda derivada en el valor crítico $x = 2$, $S''(2) = 4 + \frac{64}{2^3} = 12 > 0$ por lo que en $x = 2$ tienes un valor mínimo que es $S(2) = 2(2)^2 + 32(2)^{-1} = 8 + 16 = 24$.

Paso 5. Para encontrar la altura de la caja sustituye el valor encontrado, $x = 2$, en $y = \frac{8}{x^2}$.

$$y = \frac{8}{2^2} = 2$$

Por lo tanto, para que la superficie exterior de la caja sea mínima esta debe ser un cubo con medida de 2 m de lado.

Actividad formativa 11.1

1. Disponemos de una barra de aluminio de 8 metros para construir una portería de fútbol. Si queremos que el área de la portería sea máxima, ¿cuánto deben medir los postes y el larguero?
2. Un granjero tiene gallinas y pollitos que quiere separar, para ello utiliza 200 metros de cerca. Los corrales quiere hacerlos rectangulares, iguales y contiguos, es decir, que compartan un lado de la cerca. Determina las dimensiones de los corrales para que el área cercada sea máxima.
3. Encuentra las dimensiones del rectángulo con el área máxima posible que está delimitado por la curva parabólica $y = 9 - x^2$ y el eje x.

Problemas de optimización de volumen

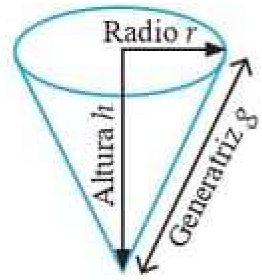
Trabajar con el volumen máximo o mínimo de un objeto es muy semejante al cálculo del área máxima o mínima de un objeto, las diferencias radican en las dimensiones del espacio considerado, como se muestra en el video del código QR 11.2.

Código QR 11.2. Video 4 del profe Alex, optimización. (Parzibyte, 2025).

Ejemplo formativo 11.3

1. Un restaurante de tu localidad quiere vender conos con alitas, boneless, aros de cebolla y papas. Si los conos tienen una generatriz de 21 cm., ¿qué altura y radio deben tener para maximizar su volumen?

Resolución



Paso 1. El volumen de un cono esta dado por

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Si observas la figura de la derecha, puedes ver que en el cono la generatriz, la altura y el radio forman un triángulo rectángulo, por lo tanto

$$h^2 + r^2 = g^2$$

Despeja r^2 y sustituye el valor de la generatriz para obtener

$$r^2 = 21^2 - h^2 = 441 - h^2$$

Sustituye r^2 en la ecuación del volumen.

$$V = \frac{\pi(441 - h^2)h}{3}$$

Resuelve las operaciones correspondientes para obtener la ecuación del volumen en función de h.

$$V(h) = 147\pi h - \frac{1}{3}\pi h^3$$

Paso 2. Deriva la función $V(h)$, $V'(h) = 147\pi - \pi h^2$.

Paso 3. Para encontrar el valor crítico, iguala a cero $V'(h)$ y resuelve la ecuación.

$$147\pi - \pi h^2 = 0 \;\Rightarrow\; \pi h^2 = 147\pi \;\Rightarrow\; h^2 = 147 \;\Rightarrow\; h = \pm\sqrt{147}$$

Dado que la altura debe ser mayor que cero, entonces $h = \sqrt{147}$.

Por lo tanto, tienes el valor crítico $h = \sqrt{147}$.

Paso 4. Calcula la segunda derivada de la función $V(h)$.

$$V''(h) = -2\pi h$$

Evalúa la segunda derivada en el valor crítico.

$V''(\sqrt{147}) = -2\pi\sqrt{147} < 0$, por lo que la función $V(h)$ tiene un máximo.

Paso 5. Para que el volumen sea máximo la altura debe ser de $\sqrt{147}$ cm. Luego, para determinar el radio sustituye el valor de la altura y despeja r en la siguiente ecuación $r^2 = 441 - h^2$, para obtener

$$r^2 = 441 - (\sqrt{147})^2 = 441 - 147 = 294 \Rightarrow r = \sqrt{294}$$

Por lo tanto, para que el volumen del cono sea máximo el radio debe de ser de $\sqrt{294} \approx 17.15$ cm y la altura de $\sqrt{147} \approx 10.82$ cm.

Actividad formativa 11.2

1. Tu maestro de Pensamiento Matemático III les entregó por equipo un pedazo de cartulina de 20 cm × 20 cm para que armen una caja sin tapadera, cortando cuadros en las esquinas para poder armar la caja, les dijo que el equipo que armara la caja de mayor volumen tendría un punto extra en el examen. ¿Qué medida tendría tu caja para poder obtener el punto extra?
2. Una compañía de sopas quiere crear una lata cilíndrica con un área de superficie de 48π pulgadas cuadradas. Encuentra las dimensiones que maximicen el volumen de la lata.

EVALUACIÓN FORMATIVA 11.1

1. Determina dos números que sumados den como resultado 60 y su producto sea máximo.
2. Obtén las dimensiones del mayor rectángulo cuyo perímetro es 20 metros.
3. Demuestra que toda parábola $y = ax^2 + bx + c$ (con $a \neq 0$) tiene un máximo o un mínimo absoluto y que su vértice se encuentra en el punto $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$.
4. En una fábrica de refrescos se quieren elaborar latas cilíndricas para vender refrescos de 250 ml (250 cm^3). ¿Qué altura y que radio deben tener las latas para que el material utilizado sea mínimo?
5. Pedro quiere construir una caja de base rectangular a partir de una hoja de PVC de 24 por 9 pulgadas. Corta en cada esquina cuadrados para poder doblar los lados. Determina el volumen máximo con el que puede fabricar su caja.
6. Un estudiante tiene una cartulina cuadrada cuya área es 24 cm^2 y quiere hacer una caja sin tapa cortando cuadrados en las esquinas y doblando los lados. ¿Qué altura debe dar a la caja para obtener el volumen máximo?

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ______________________________ Plantel: ______________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 11. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Argumenté sobre la practicidad del criterio de la segunda derivada. (M4-C2)			
Planteé soluciones a problemas de optimización usando el criterio de la primera derivada. (M4-C3)			
Socialicé con mis compañeros de equipo el procedimiento para resolver optimizar una función. (M2-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

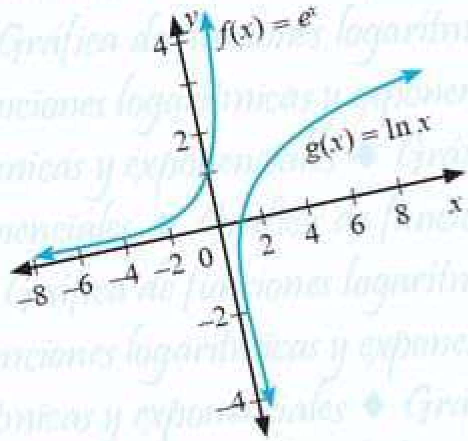
Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 11 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Argumentó sobre la practicidad del criterio de la segunda derivada para valores extremos. (M4-C2)			
Planteó soluciones a problemas de optimización usando el criterio de la primera derivada. (M4-C3)			
Socializó con mis compañeros de equipo el procedimiento para resolver optimizar una función. (M2-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Gráfica de funciones logarítmicas y exponenciales



Progresión de aprendizaje 12

Examina la gráfica de funciones logarítmicas con diferentes bases y las gráficas de las funciones exponenciales para describirlas y realizar afirmaciones sobre el significado de que la función exponencial y logarítmicas de base "a" sean funciones inversas entre sí.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M3-C2 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	A			
	C			
	H			
M2-C3 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 12.1

1. Selecciona la respuesta correcta.

   i. Si $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, entonces $a^3 \cdot a^5$ es igual a:

   a) a^2 b) a^{15} c) a^8 d) a^{-2}

   ii. Si $(a^m)^n = a^{mn}$, entonces $(a^3)^5$ es igual a:

   a) a^2 b) a^{15} c) a^8 d) a^{-2}

   iii. Si $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, entonces $\frac{a^3}{a^5}$ es igual a:

   a) a^2 b) a^{15} c) a^8 d) a^{-2}

   iv. El valor del exponente de la siguiente expresión $2^{\square} = 8$ es:

   a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

2. Completa las siguientes expresiones:

a) Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es ______________________ en (a, b).

b) Si $f'(x) = 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es ______________________ en (a, b).

c) Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces la función f es ____________ en (a, b).

3. La derivada de la función $f(x) = e^x \ln x$ es:

a) $f'(x) = e^x \ln x$ b) $f'(x) = \frac{e^x}{x}$ c) $f'(x) = e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$

En un laboratorio se estudia el crecimiento de un tipo de bacteria y se observa que pasado 1 minuto la bacteria se dividió en dos bacterias, pasados 2 minutos, estas se dividieron y dieron lugar a 4, pasados 3 minutos hay 8, pasados 4 minutos hay 16 bacterias y así sucesivamente.

Analiza la siguiente tabla.

Valor de x	$f(x) = x^2$	$f(x) = 2^x$
1	1	2
2	4	4
3	9	8
4	16	16
5	25	32
6	36	64
7	49	128
8	64	256
9	81	512
10	100	1024

¿Cuál de las dos funciones que aparecen en la tabla a la izquierda te permite modelar matemáticamente el crecimiento de la bacteria que se estudia en el laboratorio?

Observa que, a medida que el tiempo aumenta, también lo hace el número de descendientes. Cuando la variable está en el exponente, un pequeño cambio en la variable independiente provoca un cambio significativo en el valor de la función.

Una organización ambiental monitorea la salud de diversas especies de animales en un bosque tropical. Uno de los indicadores clave que utiliza para evaluar el estado del ecosistema es la tasa de crecimiento poblacional de ciertas especies.

La población de una especie de aves en el bosque ha mostrado un crecimiento exponencial en los últimos años. Hace 5 años, había aproximadamente 500 individuos de esta especie. Sin embargo, debido a un aumento en la disponibilidad de recursos y una disminución de sus depredadores, la tasa de crecimiento anual se ha mantenido en un 12%. ¿Qué significan los resultados obtenidos en el contexto del ecosistema? ¿Qué implicaciones podría tener un crecimiento tan rápido para el equilibrio del bosque?

Funciones exponenciales

Las funciones exponenciales modelan diversas situaciones del mundo real en las que las cantidades aumentan o disminuyen en una proporción relativa a la cantidad presente. Ejemplos de esto incluyen el crecimiento poblacional a lo largo del tiempo y la depreciación del valor de un bien. Al igual que las funciones cuadráticas, las funciones exponenciales tienen una tasa de cambio que no es constante, sino variable. En el crecimiento exponencial, la tasa de cambio aumenta con el tiempo, mientras que, en el decrecimiento exponencial, la tasa de cambio disminuye con el tiempo.

Definición de la función exponencial

La función exponencial con base a e intercepto con el eje y en $(0, b)$ se define para todos los números reales x por

$$f(x) = ba^x$$

donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

$a > 0$ porque, si $a = 0$, entonces, $a^0 = 0^0$ no está definido.

$a \neq 1$, porque $f(1) = 1^x = 1$ es una función constante, para todo $x \in \Re$.

Gráfica de la función $f(x) = a^x$

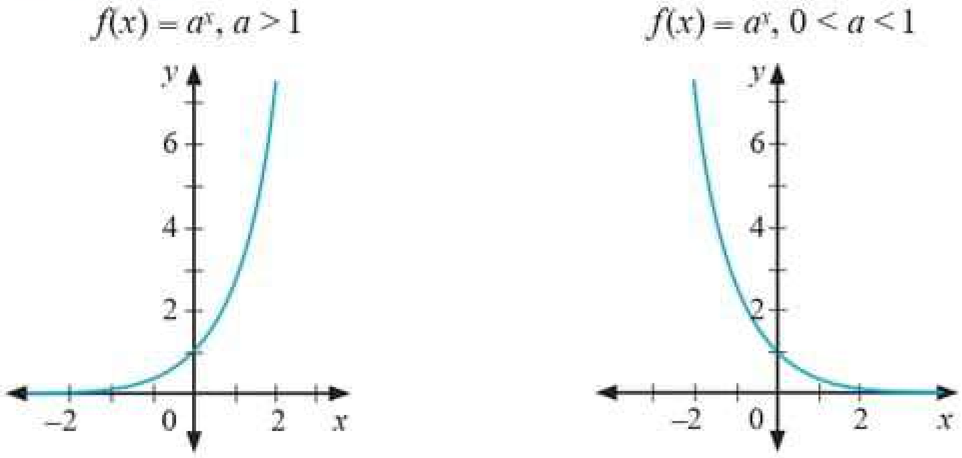


Figura 12.1. Gráfica de la función $f(x) = a^x$.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Características de las funciones exponenciales

Características	$f(x) = a^x$, con $a > 1$	$f(x) = a^x$, con $0 < a < 1$
Dominio	$x \in \Re$	$x \in \Re$
Rango	$f(x) \in (0, \infty)$	$f(x) \in (0, \infty)$
Continuidad	Continua	Continua
Concavidad	Hacia arriba	Hacia arriba
Monotonía	Creciente	Decreciente
Máximos y mínimos relativos	No tiene	No tiene
Intercepción con el eje x	No tiene	No tiene
Intercepción con el eje y	$(0, 1)$	$(0, 1)$
Asíntotas	Eje x (recta $y = 0$)	Eje x (recta $y = 0$)
Simetría	No tiene	No tiene

Cuando $a = e$, la función $f(x) = e^x$ y se le llama exponencial natural, donde e es el número de Euler o constante de Napier, el cual como ya aprendiste es un número irracional y su valor aproximado es 2.71828.

Ejemplo formativo 12.1

1. Utiliza los criterios que aprendiste en la progresión 10 para analizar la monotonía, la concavidad y la existencia de extremos de la función $f(x) = a^x$. Compara los resultados con la información obtenida de la gráfica.

Resolución

Para analizar la monotonía utiliza el teorema estudiado. Calcula la primera derivada y analiza su signo.

Si $f(x) = a^x$, entonces $f'(x) = a^x \ln a$, si $a > 1 \Rightarrow \ln a > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente y si $0 < a < 1 \Rightarrow \ln a < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$. La función es decreciente.

Para analizar la existencia de extremos toma en cuenta que no hay cambio en el signo de la derivada, la función para $a > 1$ es siempre creciente y para $0 < a < 1$ es siempre decreciente. Por tanto, la función no tiene máximos, ni mínimos.

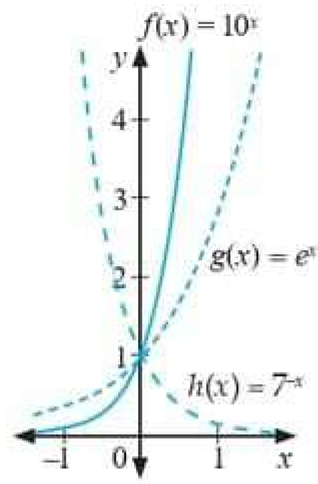
Para analizar la concavidad utiliza el criterio de la segunda derivada.

$f''(x) = (a^x \ln a)' = (a^x)' \ln a + a^x (\ln a)' = (a^x \ln a) \ln a = a^x \ln^2 a > 0$. La función es cóncava hacia arriba para cualquier $a > 0$.

Estos resultados coinciden con los obtenidos de la observación de las gráficas de la Figura 12.1.

Ejemplo formativo 12.2

1. En la figura a la derecha se muestran las gráficas de las funciones $g(x) = e^x$, $f(x) = 10^x$, $h(x) = 7^{-x}$. Analiza sus gráficas y compara sus comportamientos.



Resolución

Las gráficas de las funciones $g(x) = e^x$ y $f(x) = 10^x$ muestran el comportamiento y las características de la función $\boldsymbol{f(x) = a^x}$**, con** $\boldsymbol{a > 1}$.

La gráfica de la función $h(x) = 7^{-x} = \left(\frac{1}{7}\right)^x$ muestra el comportamiento y las características de la función $\boldsymbol{f(x) = a^x}$, con $\boldsymbol{0 < a < 1}$.

Observa que las tres funciones comparten un punto en común, el $(0, 1)$, y tienen características similares, excepto la última función que es decreciente. Al examinarlas detenidamente, comprobarás que la función $f(x) = 10^x$ crece más rápidamente, que $f(x) = e^x$. Esto significa que, a medida que la base es mayor, la función aumenta con mayor rapidez.

Actividad formativa 12.1

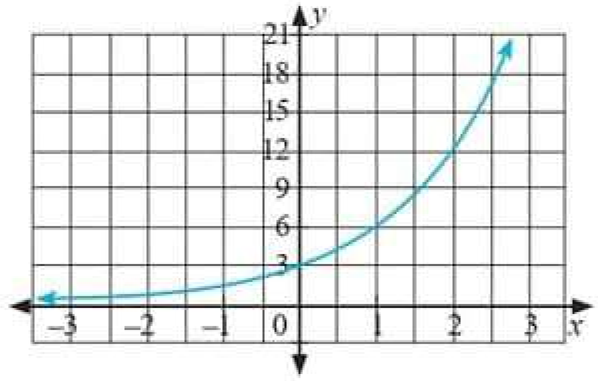
1. Utiliza Geogebra o Desmos para graficar sobre el mismo el sistema de coordenadas las funciones $f(x) = 2^x$, $g(x) = (1/2)^x$ y $h(x) = 2^{x-5}$. Analiza sus gráficas y compara sus comportamientos.

Utiliza GeoGebra

No todos los gráficos que parecen exponenciales lo son realmente. A veces, ciertas funciones pueden parecer exponenciales a simple vista, pero tienen diferentes características matemáticas, por lo que se debe comprobar que se basa en un modelo que muestra el mismo porcentaje de crecimiento con cada aumento unitario de x.

Ejemplo formativo 12.3

1. Dado el gráfico de la función, escribe su ecuación $f(x) = b(a)^x$; donde b es el intercepto con el eje y.



Resolución

Para encontrar la ecuación procede de la siguiente forma:

Paso 1. Identifica el punto de intersección con el eje y. La coordenada y de este punto es el valor de b.

Paso 2. Determina la base a. Para ello utiliza dos puntos del gráfico, de ser posible con coordenadas enteras.

Paso 3. Escribe la expresión con los valores obtenidos para a y b.

Elige la intersección con el eje y del gráfico, (0, 3), como primer punto. Así, se tiene el valor inicial, $b = 3$. A continuación, elige un punto de la curva a cierta distancia de (0, 3) con coordenadas enteras, por ejemplo, el punto (2, 12).

Escribe la forma de la función exponencial	$y = ba^x$
Sustituye el valor inicial 3 por b	$y = 3a^x$
Sustituye el punto (2, 12)	$12 = 3a^2$

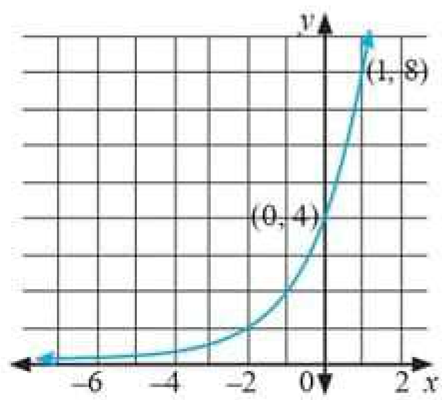
Divide entre 3 la ecuación y resuelve la ecuación resultante

$$4 = a^2 \quad \Rightarrow \quad a = \pm\sqrt{4} = \pm 2, \text{ dado que } a > 0, \text{ se tiene que } a = 2.$$

Sustituye a y b en la ecuación de la función exponencial $f(x) = b(a)^x$. Finalmente se obtiene: $f(x) = 3(2)^x$.

Actividad formativa 12.2

1. Dado el gráfico de la función que se muestra a la derecha, escribe su ecuación $f(x) = b(a)^x$; donde b es el intercepto con el eje y.



Cuando estamos en presencia de procesos de crecimiento exponencial se pueden distinguir dos modelos de crecimiento.

- **Modelo de crecimiento discreto**: se utiliza cuando el crecimiento ocurre en intervalos específicos y definidos, como al final de cada mes o año. La fórmula es: $P(t) = P_0(1 + r)^t$.
- **Modelo de crecimiento continuo:** se utiliza cuando el crecimiento ocurre de manera continua a lo largo del tiempo, como en procesos biológicos o demográficos. La fórmula es:
$$P(t) = P_0e^{rt}.$$

Si una función exponencial creciente tiene una tasa de crecimiento de r% cada año, en el modelo de crecimiento discreto, el factor de se obtiene sumando una unidad a esta tasa anual. Similarmente, si la función es decreciente, el factor se obtiene restando esa tasa de la unidad.

Es decir:

Factor de cambio = $1 + r$, si la función es creciente.

Factor de cambio = $1 - r$, si la función es decreciente.

De aquí se tienen las fórmulas de crecimiento y decrecimiento exponencial:

$$P(t) = P_0(1 + r)^t \text{ y } P(t) = P_0(1 - r)^t$$

Retomemos el tema que estudia la organización ambiental sobre el crecimiento de aves en el bosque tropical. En este caso, vamos a utilizar el modelo de crecimiento continuo.

Ejemplo formativo 12.4

1. La población de una especie de aves en el bosque ha mostrado un crecimiento exponencial en los últimos años. Hace 5 años, había aproximadamente 500 individuos de esta especie. Sin embargo, debido a un aumento en la disponibilidad de recursos y una disminución de sus depredadores, la tasa de crecimiento anual se ha mantenido de forma continua en un 12%. La organización quiere calcular qué población hay en la actualidad.

Resolución

Para resolver este problema utiliza la fórmula del crecimiento exponencial

$$P(t) = P_0e^{rt}, \text{ donde:}$$

$P(t)$ es la población en el tiempo t	y, según los datos del problema:
P_0 es la población inicial.	$P_0 = 500$ individuos hace 5 años
r es la tasa de crecimiento.	$r = 12\% = 0.12$
t es el tiempo en años.	$t = 5$ años

Por tanto,

$P(t) = 500e^{0.12t}$

$P(5) = 500e^{0.12 \cdot 5} = 500e^{0.60}$

$P(5) \approx 500 \cdot 1.8221 \approx 911.05$

La población de esta especie, después de 5 años será aproximadamente de 991 aves.

Actividad formativa 12.3

1. El número de bacterias de un cultivo aumenta 10% por minuto. Si inicialmente hay 1,000 bacterias, plantea una fórmula que permita determinar el número de bacterias B en función del tiempo.

   ¿Cuántas habrá luego de tres minutos?

2. El censo 2020 muestra que cierta región tiene una población de 40,000 personas. Científicos sociales predicen que esta región experimentará una tasa de crecimiento del 5.5% al año. Sea P la función tal que $P(t)$ es la población predicha para esta región.

   Determina la fórmula para esta función, y, encuentra la población que habrá en 2030 si la tasa de crecimiento no cambia.

Funciones logarítmicas

Las funciones logarítmicas tienen numerosas aplicaciones, incluyendo su uso en ciencias experimentales, ingeniería, economía y música. Un logaritmo es el exponente al que debes elevar un número (la base) para obtener otro número determinado. Por ejemplo:

Si tienes la igualdad $2^3 = 8$, esto significa que 2 elevado al exponente 3 es igual a 8. En este caso, el logaritmo en base 2 de 8 es 3.

Se escribe: $\log_2 8 = 3$.

De forma general, si $b > 0$, el logaritmo con base a del número b es otro número real k que cumple: $a^k = b$. Es decir,

$$\boxed{\log_a b = k \text{ sí y sólo si } a^k = b}$$

Para muchos cálculos y aplicaciones se identifican dos logaritmos especiales.

1. Cuando la base $a = e$. Este se llama logaritmo natural o neperiano y se representa como $\log_e x = \ln x$.
2. Cuando la base $a = 10$. Este se llama logaritmo decimal y se representa como $\log_{10} x = \log x$ (se omite la base).

Propiedades de los logaritmos

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a a^x = x$
4. $a^{\log_a x} = x$
5. $\log_a (A \cdot B) = \log_a A + \log_a B$
6. $\log_a \left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$
7. $\log_a A^n = n \log_a A$

Definición de la función logarítmica

Sea a un número positivo con $a \neq 1$. La función logarítmica con base a, denotada por $\log_a$, se define como

$$f(x) = \log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x.$$

Así, $\log_a x$ es el exponente al que se debe elevar la base a para obtener x.

La gráfica de la función logarítmica depende del valor del número a.

$f(x) = \log_a x,\ a > 1$ $\qquad$ $f(x) = \log_a x,\ 0 < a < 1$

Figura 12.2. Gráfica de la función $f(x) = \log_a x$.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Características de las funciones logarítmicas

Características	$f(x) = \log_a x$, con $a > 1$	$f(x) = \log_a x$, con $0 < a < 1$
Dominio	$x \in (0, \infty)$	$x \in (0, \infty)$
Rango	$f(x) \in \Re$	$f(x) \in \Re$
Continuidad	Continua	Continua
Concavidad	Hacia abajo	Hacia arriba
Monotonía	Creciente	Decreciente
Máximos y mínimos relativos	No tiene	No tiene
Intercepción con el eje x	(1, 0)	(1, 0)
Intercepción con el eje y	No tiene	No tiene
Asíntotas	Eje y (recta $x = 0$)	Eje y (recta $x = 0$)

En la progresión 8 se listaron las derivadas de varias funciones, ahora incorpora a esa lista la derivada de $f(x) = \log_a x$.

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

Funciones inversas

Una **función inversa** es una función que deshace el efecto de otra función. En otras palabras, si la función original transforma un elemento a en un elemento b, la función inversa transforma al elemento b en el elemento a, es decir, lo devuelve al estado original. La inversa de una función $f(x)$ se simboliza como f^{-1} con el superíndice "–1". Es decir, dos funciones son inversas si:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = x$$

O bien, f^{-1} es la función inversa de f si:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = (f \circ f^{-1})(x) = x$$

Las funciones exponenciales y logarítmicas están estrechamente relacionadas y son inversas una de la otra. Una **función exponencial $f(x) = a^x$** donde a es positivo y distinto de 1 tiene como **inversa a la función logarítmica** $f^{-1}(x) = \log_a x$. Algunos casos particulares son:

- La **función exponencial natural** $f(x) = e^x$ es la inversa de la función logaritmo natural $f^{-1}(x) = \ln x$.
- La **función exponencial decimal** (con base 10) $f(x) = 10^x$ es la inversa de la función logaritmo decimal $f^{-1}(x) = \log x$.

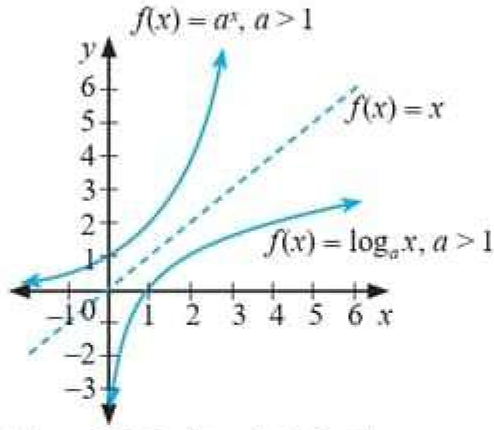


Figura 12.3. Graficas de la función exponencial y la función logarítmica de base a.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Observa que la función identidad $f(x) = x$ es un eje de simetría para estas funciones.

Es posible utilizar la derivada para esbozar la gráfica de $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$.

$f'(x) = (e^x)' = e^x$, $g'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$. Estas funciones no pueden ser cero para ningún valor de x, por tanto, no tienen valores críticos. Eso significa que sólo pueden ser crecientes o decrecientes. Como $f'(x) = e^x > 0$, para todo $x \in \Re$ y $g'(x) = \frac{1}{x} > 0$, para todo $x \in (0, \infty)$, puedes afirmar que las funciones son crecientes en todo su dominio.

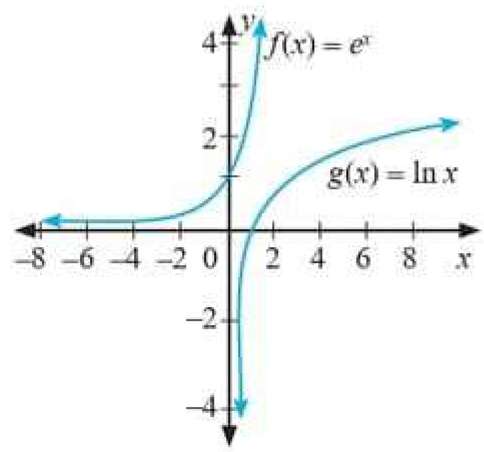


Figura 12.4. Gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

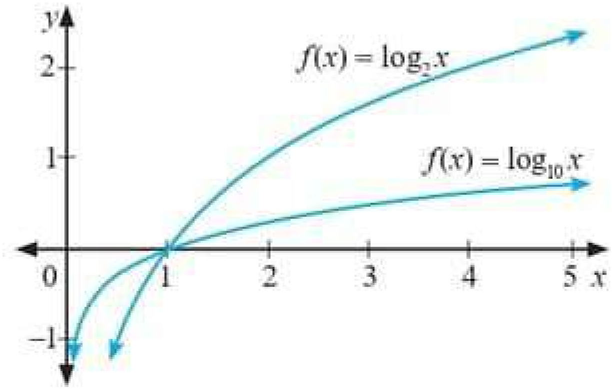
Ejemplo formativo 12.5

1. En la figura de la derecha se muestran las gráficas de las funciones $f(x) = \log_2 x$ y $f(x) = \log_{10} x$. Analiza sus características.

Resolución

Estas dos funciones son continuas en todo su dominio, el dominio de ambas son todos los números reales, el rango son todos los números reales, son crecientes y las gráficas son cóncavas hacia abajo.

Observa que en la medida que crece la base, el crecimiento de la función es más lento.



Actividad formativa 12.4

1. Utiliza Geogebra o Desmos para graficar sobre el mismo sistema de coordenadas las funciones $g(x) = \log_3 x$ y $h(x) = \log_2 (x - 5)$. Analiza sus gráficas y compara sus comportamientos.

2. Utiliza GeoGebra o Desmos para graficar las funciones $f(x) = 4^x$ y $g(x) = \log_4 x$ sobre el mismo sistema de coordenadas y compara sus comportamientos.

Utiliza GeoGebra

EVALUACIÓN FORMATIVA 12.1

1. Halla la derivada de las siguientes funciones.
   a) $f(x) = 2^x$
   b) $f(x) = 5^{3x}$
   c) $g(x) = \log x^2$
   d) $g(x) = \log_7(2x)$

2. Utiliza GeoGebra o Desmos para graficar en el mismo sistema de coordenadas las siguientes funciones. Analiza y compara su comportamiento.
   a) $f(x) = 5^x$
   b) $g(x) = 5^{-x}$
   c) $h(x) = \log_5 x$

3. Una población de conejos en una reserva natural crece a una tasa del 5% por mes. Si inicialmente hay 200 conejos, plantea una fórmula que permita determinar el número de conejos $P(t)$ en función del tiempo t (en meses). ¿Cuántos conejos habrá después de seis meses?

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ____________________________________ Plantel: _________________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 12. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Comparé gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas para describir sus características. (M3-C2)			
Construí modelos para estudiar las funciones exponencial y logarítmica. (M2-C3)			

Coevaluación para el aprendizaje

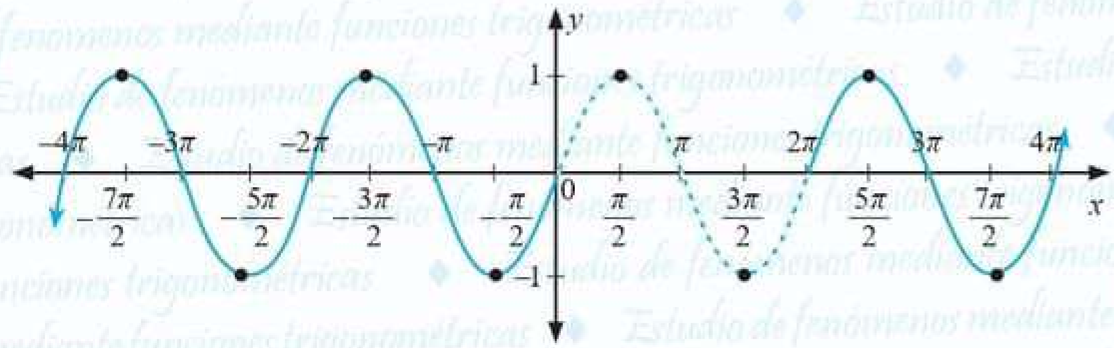
Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 12 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Comparó gráficas de funciones exponencial y logarítmicas para describir sus características. (M3-C2)			
Construyó modelos para estudiar las funciones exponencial y logarítmica. (M2-C3)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Estudio de fenómenos mediante funciones trigonométricas



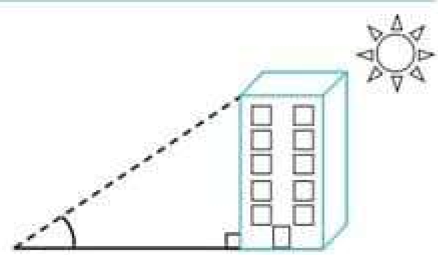
Progresión de aprendizaje 13

Analiza y describe un fenómeno en el que la periodicidad sea un constituyente fundamental a través del estudio de propiedades básicas de las funciones trigonométricas.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación.	A			
	C			
	H			
M2-C3 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 13.1

1. Un edificio de 30 m de altura proyecta una sombra de 40 m.
   a) Calcula la hipotenusa del triángulo que se forma.
   b) Selecciona la respuesta correcta. El seno del ángulo de elevación del sol se obtiene:
      i. Dividendo la altura entre la sombra proyectada.
      ii. Dividiendo la altura entre la hipotenusa del triángulo formado.
      iii. Dividiendo la sombra entre la hipotenusa.



2. En nuestro entorno existen muchos fenómenos físicos que son periódicos. Describe dos ejemplos.
   a) ______________________________
   ____
   b) ______________________________
   ____

Un ingeniero está trabajando en el diseño de un parque de atracciones. Uno de los principales atractivos que desea construir es una montaña rusa. Para que la montaña rusa sea emocionante y segura, necesita entender cómo se comportan los vagones a lo largo de la pista, especialmente en las partes donde suben y bajan.

La forma de la pista de la montaña rusa puede ser modelada utilizando funciones periódicas, como el seno y el coseno, que describen de manera efectiva el movimiento oscilatorio y las alturas a las que llegarán los vagones en diferentes puntos del recorrido. El estudio de estas funciones permite:

1. **Calcular la altura máxima y mínima.** Comprender cómo la altura de la montaña rusa varía en el tiempo, lo que es esencial para la seguridad y la emoción de los pasajeros.
2. **Determinar la velocidad.** Analizar cómo la velocidad de los vagones cambia en función de su posición en la pista, lo que es esencial para el diseño de las curvas y descensos.
3. **Crear un ciclo de operación.** Diseñar un ciclo que permita que la montaña rusa funcione de manera eficiente, asegurando que el tiempo de espera y el tiempo de recorrido sean óptimos.

Funciones periódicas

Las **funciones periódicas** son una clase especial de funciones matemáticas que se repiten a intervalos regulares. Esto significa que después de un cierto periodo de tiempo, sus valores se repiten una y otra vez. El estudio de las **funciones periódicas** es decisivo debido a su relevancia en diversas disciplinas, incluyendo matemáticas, física, música, economía y más. Estos ciclos permiten predecir comportamientos y analizar patrones, lo que resulta de mucho valor tanto en la teoría como en aplicaciones prácticas.

Observa la gráfica de una función $f(x)$, Figura 13.1.

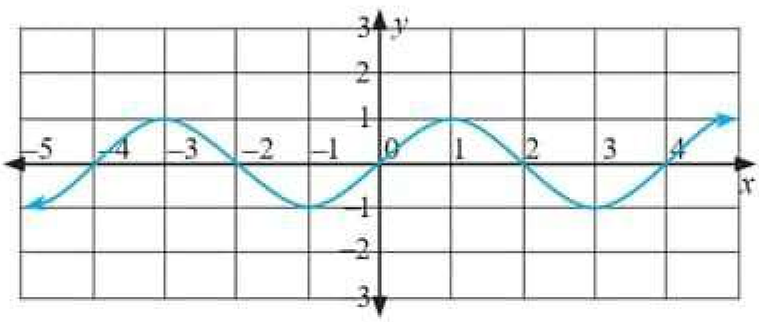


Figura 13.1. Gráfica de una función $f(x)$.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Dado que los valores $f(-4) = f(0) = f(4) = 0$ y $f(-3) = f(1) = f(5) = 1$, esto sugiere que la función es periódica con un periodo que es 4.

Función periódica

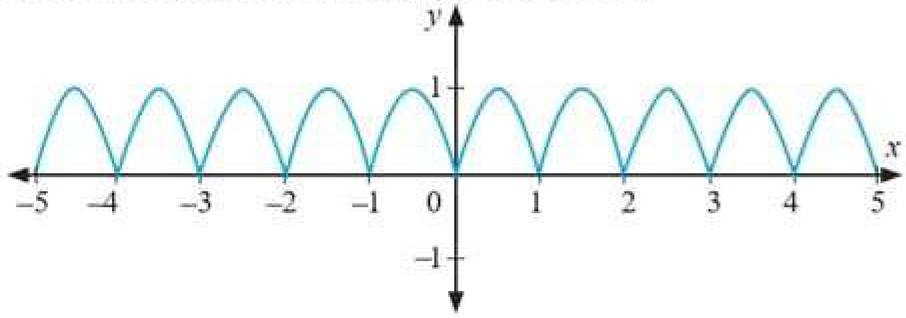
Diremos que una función f es periódica con periodo T, si la siguiente igualdad se cumple:

$$f(x) = f(x + T)$$

Esto implica que los valores que adopta la función f se repiten a intervalos específicos de tamaño T. Si T es un período de la función, es evidente que cualquier múltiplo de T también lo será. El valor mínimo de T que satisface esta definición se denomina **período fundamental**.

Ejemplo formativo 13.1

1. Determina el periodo fundamental de la siguiente función.



Resolución

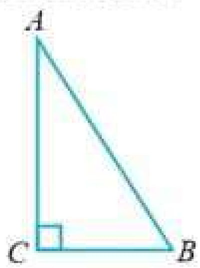
Observa que la función adopta el valor 0 para cada número natural y exhibe un comportamiento repetitivo entre n y $n+1$. Por lo tanto, dado que no existe una periodicidad de período menor, podemos concluir que el período fundamental de la función f es $T = 1$.

Razones trigonométricas

Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

Las razones trigonométricas son relaciones matemáticas que se establecen entre los lados de un triángulo rectángulo y sus ángulos. Estas razones son fundamentales en trigonometría y se utilizan para resolver problemas relacionados con triángulos y funciones trigonométricas. Las seis principales razones trigonométricas son: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

En el triángulo rectángulo ilustrado en la Figura 13.2, procedamos a determinar las razones trigonométricas.



$$\operatorname{sen} A = \frac{\text{cateto opuesto a } \angle A}{\text{hipotenusa}} = \frac{BC}{AB} \qquad \csc A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a } \angle A} = \frac{AB}{BC}$$

$$\cos A = \frac{\text{cateto adyacente a } \angle A}{\text{hipotenusa}} = \frac{AC}{AB} \qquad \sec A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } \angle A} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan A = \frac{\text{cateto opuesto a } \angle A}{\text{cateto adyacente a } \angle A} = \frac{BC}{AC} \qquad \cot A = \frac{\text{cateto adyacente a } \angle A}{\text{cateto opuesto a } \angle A} = \frac{AC}{BC}$$

Figura 13.2. Triangulo rectángulo ACB.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2025).

Razones trigonométricas en el círculo unitario

Un círculo unitario es aquel que tiene su centro en el origen de coordenadas y su radio mide una unidad. Un punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia define un triángulo OPQ con hipotenusa igual a 1. Si el punto P se desplaza en sentido antihorario a partir del punto (1, 0), se forma un ángulo θ que mide entre 0^0 y 90^0, conocido como ángulo en posición normal. Cuando el punto P define un ángulo mayor que 90^0, se le conoce como ángulo de referencia θ_R. Ver Figura 13.3.

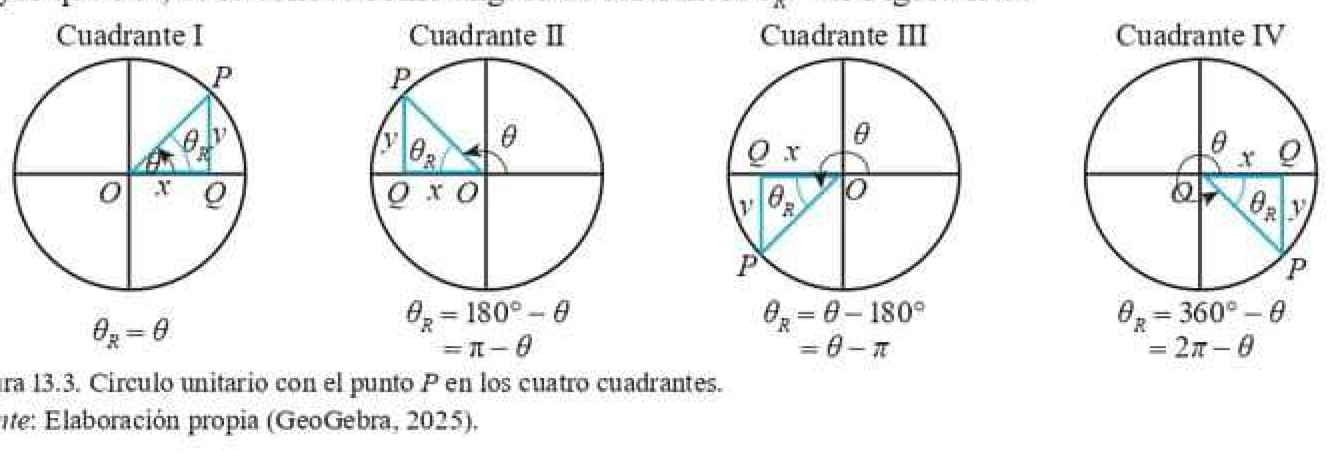


Figura 13.3. Circulo unitario con el punto P en los cuatro cuadrantes.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2025).

Las funciones trigonométricas pueden definirse a partir del círculo unitario. Por ejemplo, la función seno de un ángulo x (medido en radianes) se determina como la coordenada y del punto en el círculo unitario que se obtiene al trazar un ángulo x desde el eje positivo de las x en sentido antihorario. En otras palabras, si $P(x, y)$ representa un punto en el círculo unitario, entonces se tiene que $\text{sen}\, x = y$.

Funciones trigonométricas

Las razones trigonométricas son funciones que describen relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo y sus ángulos internos. Las razones trigonométricas se manejan como sinónimos de las funciones trigonométricas. Sin embargo, existen diferencias sutiles entre ambos conceptos.

La razón trigonométrica tal y como ha sido definida, está asociada a un triángulo rectángulo, el ángulo que la genera está dentro del rango 0-90^0, lo que no ocurre cuando se utiliza el concepto de función. Por otra parte, una razón trigonométrica puede interpretarse como un caso de relación entre los lados de un triángulo, en cambio, la función trigonométrica conceptualmente hace énfasis en la relación de dependencia entre las variables.

Las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente son herramientas muy útiles para el análisis y la comprensión de fenómenos periódicos, facilitando su representación, análisis y predicción.

Definición de la función seno

La función seno, expresada como $y = \text{sen}\, x$, asigna a cada ángulo x su correspondiente valor de la razón seno. Su gráfica es una curva continua y periódica que se repite cada 2π unidades.

La gráfica de la función $y = \text{sen}\, x$ se muestra en la Figura 13.4.

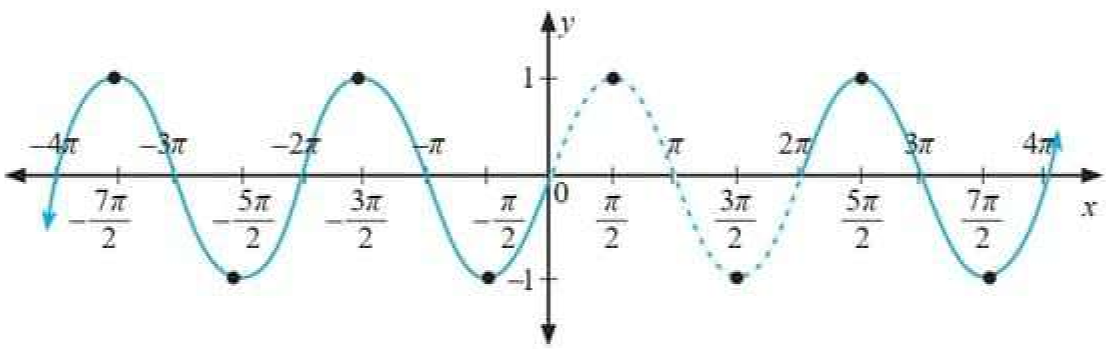


Figura 13.4. Gráfica de la función $y = \text{sen}\, x$.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Definición de la función coseno

La función coseno, expresada como $y = \cos x$, asigna a cada ángulo x su correspondiente valor de la razón coseno. Su gráfica es una curva continua y periódica que se repite cada 2π unidades.

En la Figura 13.5 se muestra la gráfica de la función $y = \cos x$.

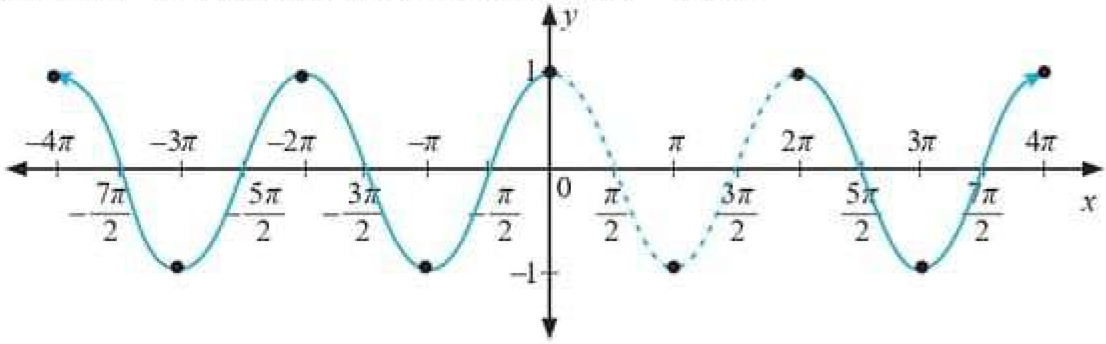


Figura 13.5. Gráfica de la función $y = \cos x$.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Propiedades de las funciones $y = \text{sen } x$ y $y = \cos x$

Propiedades	$y = \text{sen } x$	$y = \cos x$
Dominio	$x \in \Re$	$x \in \Re$
Rango	$x \in [-1, 1]$	$x \in [-1, 1]$
Continuidad	Continua	Continua
Intercepto: eje x	En $x = k\pi$ ...$(-\pi, 0)$; $(0, 0)$; $(\pi, 0)$...	En $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ... $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$...
Intercepto: eje y	$(0, 0)$	$(0, 1)$
Puntos de inflexión	$x = k\pi$ ... $(-\pi, 0)$; $(0, 0)$; $(\pi, 0)$...	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ... $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$...
Cóncava hacia arriba	...$x \in [-\pi, 0]$; $x \in [\pi, 2\pi]$...	...$x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$; $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$...
Cóncava hacia abajo	...$x \in [-2\pi, -\pi]$; $x \in [0, \pi]$...	...$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$...
Creciente	...$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$...	...$x \in [-\pi, 0]$; $x \in [\pi, 2\pi]$...
Decreciente	...$x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$; $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$...	...$x \in [-2\pi, -\pi]$; $x \in [0, \pi]$...
Máximos relativos	... $\left(-\frac{3\pi}{2}, 1\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ ...	...$(-2\pi, 1)$; $(0, 1)$...
Mínimos relativos	... $\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$; $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$	...$(-\pi, -1)$; $(\pi, -1)$...
Simetría	Impar: $\text{sen}(x) = -\text{sen } x$	Par: $\cos(x) = \cos(-x)$
Asíntotas	No tiene	No tiene
Derivada	$y = \cos x$	$y = -\text{sen } x$

Estas propiedades hacen de las funciones seno y coseno herramientas fundamentales en matemáticas, física e ingeniería.

Las funciones seno y coseno en su forma general se expresan como:

$$y = A \text{ sen } (Bx + C) + D \text{ y } y = A \cos (Bx + C) + D.$$

Donde:

- A es la amplitud de la función. La amplitud determina la altura máxima (o mínima) de la onda con respecto al eje x. Si A es positivo, la onda oscila entre $D - A$ y $D + A$. Si A es negativo, la amplitud se toma como el valor absoluto y la onda se invierte verticalmente.
- B está relacionado con la frecuencia angular, que es la cantidad de oscilaciones que ocurren en un período T.
- C es la fase o desplazamiento horizontal de la gráfica a la derecha o a la izquierda. Si $C < 0$, se desplaza a la derecha y si $C > 0$, se desplaza a la izquierda.
- D es el desplazamiento vertical, que eleva o deprime la función completa. Si D es positivo, la función se desplaza hacia arriba; si es negativo, hacia abajo.

En resumen, la amplitud A y la frecuencia angular B son dos parámetros clave que afectan la forma de la onda, influyendo en su altura y en cuántas veces oscila en un intervalo dado, respectivamente.

Las derivadas de estas funciones son:

$$y' = [A(\text{sen}\,(Bx + C)) + D]' = A(\text{sen}\,(Bx + C))' + (D)' = AB\cos\,(Bx + C).$$

$$y' = [A(\cos\,(Bx + C)) + D]' = A(\cos\,(Bx + C))' + (D)' = -AB\,\text{sen}\,(Bx + C).$$

En las Figuras 13.6 y 13.7 se muestran las gráficas de las funciones seno y coseno en su forma general

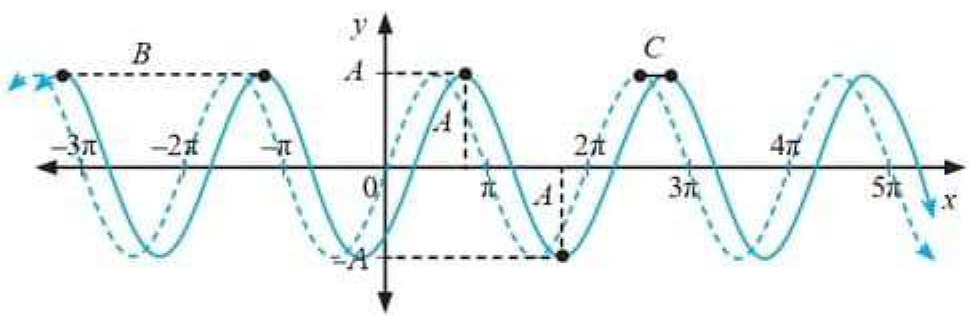


Figura 13.6. Desplazamiento horizontal de la función $y = A$ sen $(Bx + C)$.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

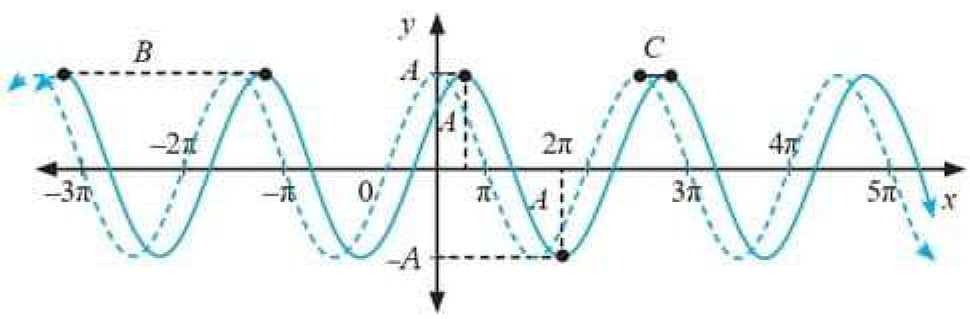


Figura 13.7. Desplazamiento horizontal de la función $y = A\cos\,(Bx + C)$.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Actividad formativa 13.1

1. Utiliza el graficador Desmos y traza la gráfica de las siguientes funciones para diferentes valores de A, B y D.

   a) $y = A\,\text{sen}\,(Bx) + D$

   b) $y = A\cos\,(Bx) + D$

Ejemplo formativo 13.2

1. Determina la amplitud A, la frecuencia B y la fase C para las funciones $f(x) = 2 \text{ sen}\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$ y $g(x) = -3 \text{ sen } 2x$. Utiliza un graficador para trazar las gráficas de las funciones anteriores.

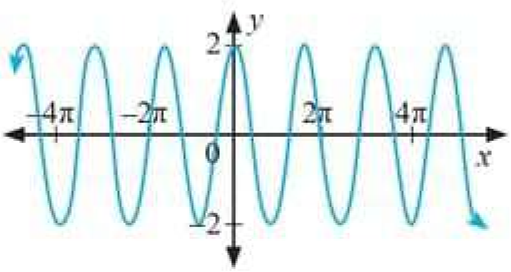
Resolución

Para $f(x) = 2 \text{ sen}\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$ la amplitud A es el coeficiente del seno, en este caso $A = 2$. La frecuencia B es el coeficiente de x dentro de la función seno. Aquí $B = 4$. La fase C es el término constante que acompaña a x dentro de la función seno, $C = \frac{\pi}{2}$.

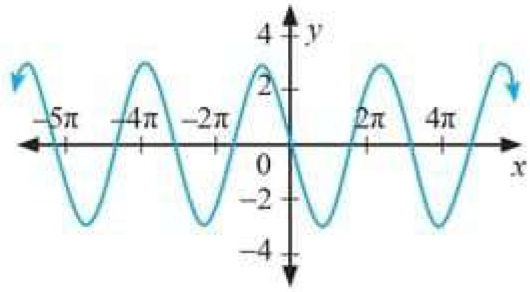
Para $g(x) = -3 \text{ sen } 2x$ la amplitud A: aunque el coeficiente es negativo, la amplitud se toma como un valor positivo, $A = 3$. La frecuencia $B = 2$. En esta función no hay término constante sumado a $2x$, por tanto $C = 0$.

Gráfica de las funciones.

$f(x) = 2 \text{ sen}\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$



$g(x) = -3 \text{ sen } 2x$



Ejemplo formativo 13.3

1. Un ingeniero está diseñando una montaña rusa y decide modelar la altura de la pista en función de la posición horizontal x (en metros) utilizando la función seno. La altura $h(x)$ de la pista en metros se define como: $h(x) = 10\text{sen}\left(\frac{\pi}{20}x\right) + 15$.
   a) ¿Cuál es la altura máxima y mínima que alcanzan los vagones de la montaña rusa?
   b) ¿En qué valores de x (en metros) se alcanzan estas alturas?
   c) ¿Cuál es el período de la función y cada cuánto se repetirá el ciclo de la montaña rusa?

Resolución

a) **Altura máxima y mínima.**

La función seno oscila entre –1 y 1. Por lo tanto, el término $10\text{sen}\left(\frac{\pi}{20}x\right)$ oscila entre –10 y 10.

La altura máxima se encuentra cuando $\text{sen}\left(\frac{\pi}{20}x\right) = 1 \Rightarrow h_{max} = 10(1) + 15 = 25$ metros.

La altura mínima cuando $\text{sen}\left(\frac{\pi}{20}x\right) = -1 \Rightarrow h_{min} = 10(-1) + 15 = 5$ metros.

b) **Valores de x para alturas máxima y mínima.**

Para encontrar los valores de x donde se alcanza la altura máxima

$h_{max}(x) = 25$: $10\text{sen}\left(\frac{\pi}{20}x\right) = 10 \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{20}x\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{20}x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = 10 + 40k$.

Para $k = 0$, $x = 10$ metros (altura máxima).

Para la altura mínima $h_{min}(x) = 5$: $10\text{sen}\left(\frac{\pi}{20}x\right) = -10 \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{20}x\right) = -1 \Rightarrow \frac{\pi}{20}x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$\Rightarrow x = 30 + 40k$. Para $k = 0$, $x = 30$ metros (altura mínima).

c) **Período de la función.**

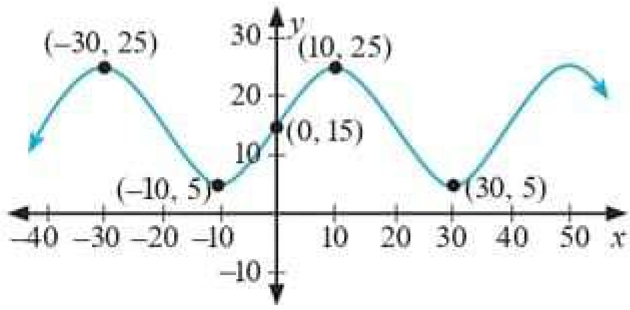
La función $h(x)$ tiene la forma A sen Bx, donde el período T se calcula como: $T = \frac{2\pi}{B}$.

En este caso, $B = \frac{\pi}{20}$, por lo que: $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{20}} = 40$ metros.

Esto significa que cada 40 metros, la montaña rusa repetirá su ciclo de altura.

En resumen

- Altura máxima: 25 metros (en $x = 10 + 40k$, para $k = 1, 2, \ldots, n$).
- Altura mínima: 5 metros (en $x = 30 + 40k$, para $k = 1, 2, \ldots, n$).
- Período: 40 metros.



Actividad formativa 13.2

1. Determina la amplitud A, la frecuencia B y la fase C para las siguientes funciones $g(x) = -3\cos 2x$ y $h(x) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$. Utiliza un graficador para trazar las gráficas de las funciones anteriores.

Ejemplo formativo 13.4

1. Se tiene un péndulo simple de 2 metros de longitud, que oscila de manera armónica en un plano vertical. El movimiento del péndulo está descrito por la función $s(t) = 2\text{sen}\ 4t$, donde $s(t)$ representa el desplazamiento del péndulo respecto a su posición de equilibrio.
   a) Determina la función velocidad de oscilación con respecto al tiempo.
   b) Calcula la velocidad en los instantes $t = \frac{\pi}{8}$ y $t = \frac{\pi}{4}$.
   c) Interpreta los resultados.

Resolución

a) Función velocidad: para encontrar la función velocidad $v(t)$, deriva la función desplazamiento $s(t)$: $s'(t) = 2(\text{sen}\ 4t)' = 2(4\cos 4t) = 8\cos 4t$.

La función velocidad es $v(t) = 8\cos 4t$.

b) Cálculo de la velocidad en los instantes dados:

- Para $t = \frac{\pi}{8}$: $v\left(\frac{\pi}{8}\right) = 8\cos 4\frac{\pi}{8} = 8\cos\frac{\pi}{2} = 0$.
- Para $t = \frac{\pi}{4}$: $v\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8\cos 4\frac{\pi}{4} = 8\cos\pi = 8(-1) = -8$

c) Interpretación de los resultados:

- En el instante $t = \frac{\pi}{8}$, la velocidad del péndulo es 0, lo que indica que el péndulo alcanza su posición máxima de desplazamiento (punto de máxima amplitud) en ese instante, y en ese momento no se mueve.
- En el instante $t = \frac{\pi}{4}$, la velocidad es -8, lo que indica que el péndulo se está moviendo hacia la posición de equilibrio en dirección opuesta al desplazamiento positivo. El signo negativo sugiere que el péndulo está moviéndose hacia el lado opuesto de la amplitud máxima.

Estos resultados reflejan el comportamiento típico de un péndulo oscilante, donde la velocidad varía a lo largo del tiempo, alcanzando cero en los puntos de máxima amplitud y tomando valores negativos o positivos conforme se mueve hacia y desde la posición de equilibrio.

Actividad formativa 13.3

1. Se tiene un resorte de 3 metros, sujeto verticalmente por un extremo, del cual cuelga un cuerpo que oscila durante unos segundos. El movimiento del cuerpo está descrito por la función $s(t) = -5 \cos 3t$, donde $s(t)$ representa la posición del cuerpo con respecto a su posición de reposo.

   a) Determina la función velocidad de oscilación con respecto al tiempo.

   b) Calcula la velocidad en el instante $t = \frac{\pi}{6}$ y $t = \frac{\pi}{2}$.

   c) Interpreta los resultados.

Definición de la función tangente

La función tangente, expresada como $y = \tan x$, asigna a cada ángulo x su correspondiente valor de la razón tangente. Su gráfica es una curva discontinua y periódica que se repite cada π unidades.

En la Figura 13.8 se muestra la gráfica de la función $y = \tan x$.

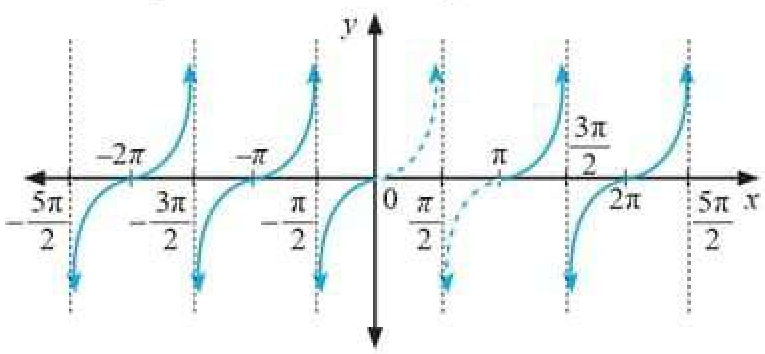


Figura 13.8. Gráfica de la función $y = \tan x$.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Actividad formativa 13.4

1. Observa la gráfica de la función $y = \tan x$ y completa la siguiente tabla.

Propiedades de la función $y = \tan x$

Propiedades	$y = \tan x$
Dominio	
Rango	
Continuidad	
Intercepto: eje x	
Intercepto: eje y	
Puntos de inflexión	
Cóncava hacia arriba	
Cóncava hacia abajo	
Monotonía	
Máximos y mínimos relativos	
Simetría	
Asíntotas	
Derivada	

La forma general de la función tangente se expresa como:

$$y = A\tan(Bx + C) + D$$

Donde:

- A es un factor que afecta la amplitud de la función.
- B es un factor que afecta el período de la función.
- C es el desplazamiento horizontal. Un valor negativo de C desplaza la gráfica hacia la derecha, mientras que un valor positivo la desplaza hacia la izquierda.
- D es el desplazamiento vertical. Un valor positivo de D desplaza la gráfica hacia arriba, y un valor negativo la desplaza hacia abajo.

EVALUACIÓN FORMATIVA 13.1

1. Determina la amplitud A, la frecuencia B y la fase C para las siguientes funciones. Grafica las funciones.

   a) $y = -2 \operatorname{sen}(2x - 4)$

   b) $y = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

   c) $y = \tan 2x$

2. Halla la derivada de las siguientes funciones.

   a) $y = 5\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x - 2\right) + 4$

   b) $y = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

   c) $y = 6\tan(x + \pi)$

3. Se tiene un péndulo simple de 3 metros de longitud, que oscila de manera armónica en un plano vertical. El movimiento del péndulo está descrito por la función $s(t) = 3 \operatorname{sen} 3t$, donde $s(t)$ representa el desplazamiento del péndulo respecto a su posición de equilibrio.

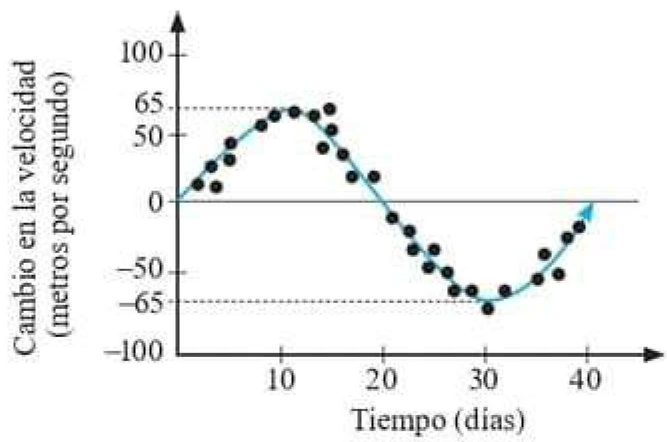
   a) Determina la función velocidad de oscilación con respecto al tiempo.

   b) Calcula la velocidad en los instantes $t = \frac{\pi}{6}$ y $t = \frac{\pi}{3}$.

   c) Interpreta los resultados.

4. El 26 de abril de 1977, los astrónomos anunciaron el descubrimiento de un nuevo planeta orbitando la estrella Rho Coronae Borealis (Sky and Telescope, julio de 1997). Los astrónomos dedujeron la existencia del planeta midiendo el cambio en la velocidad de la línea de visión de la estrella durante un período de diez meses.

   Las medidas parecen caer a lo largo de una onda sinusoidal, como se muestra en la figura adjunta.



   a) ¿Cuál es el periodo, amplitud y ecuación de la onda sinusoidal?

   b) ¿Cuántos días terrestres se necesitan para que el planeta orbite a la estrella Rho Coronae Borealis?

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ______________________________ Plantel: ______________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 13. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Interpreté la periodicidad de las funciones trigonométricas a través de sus propiedades. (M2-C2)			
Construí modelos para describir determinados fenómenos periódicos utilizando las propiedades de las funciones trigonométricas. (M2-C3)			

Coevaluación para el aprendizaje

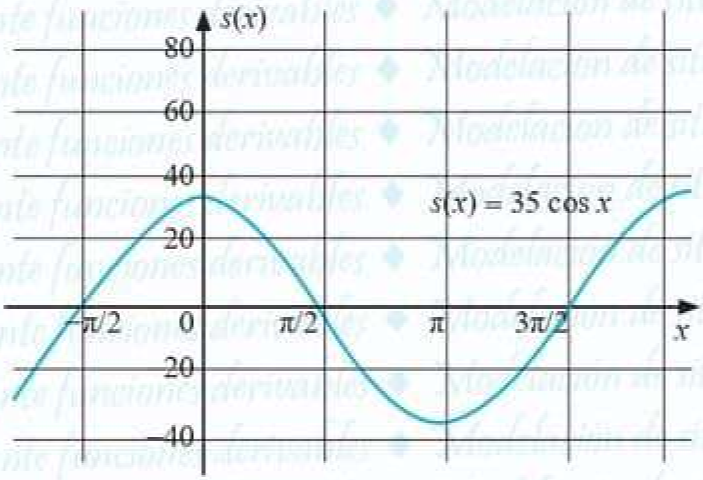
Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 13 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Interpretó la periodicidad de las funciones trigonométricas a través de sus propiedades. (M2-C2)			
Construyó modelos para describir determinados fenómenos periódicos utilizando las propiedades de las funciones trigonométricas. (M2-C3)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Modelación de situaciones mediante funciones derivables



Progresión de aprendizaje 14

Selecciona una problemática, situación o fenómeno tanto real como ficticio para modelarlo utilizando funciones derivables.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	A			
	C			
	H			
M2-C3 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			
M3-C4 Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o a evaluación.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 14.1

1. La derivada de la función $f(x) = (x^2 + 3)^3$ es
   a) $f'(x) = 3(x^2 + 3)^2$ b) $f'(x) = 6x(x^2 + 3)^2$ c) $f'(x) = 2x(x^2 + 3)^3$
2. La derivada del producto de dos funciones $u(x)$ y $v(x)$ está dada por:
   a) $(u \cdot v)' = (u)' \cdot (v)'$
   b) $(u \cdot v)' = (u)' \cdot v + u \cdot (v)'$
   c) $(u \cdot v)' = [(u)' \cdot v]' \cdot [u \cdot (v)']$
3. Determina la derivada de las siguientes funciones:
   a) $f(x) = x \ln x$ b) $h(x) = \frac{5}{2} \operatorname{sen} x + 3\sqrt{x}$

Las matemáticas nos brindan la posibilidad de describir, calcular y predecir el comportamiento de una gran variedad de fenómenos que ocurren en nuestra vida cotidiana. Uno de los temas más importantes se da a partir del análisis de las relaciones entre magnitudes físicas y expresiones matemáticas. Estas relaciones pueden expresarse en términos de fórmulas, datos numéricos o gráficas. Así, por ejemplo, un gráfico, una función o una ecuación pueden ser modelos matemáticos de una situación específica.

Sobre la modelación matemática puedes profundizar entrando al código QR 14.1.

QR 14.1. El mundo de la matemática, fundación POLAR. (Parzibyte, 2025).

El mundo real y la modelación con funciones derivables

Las matemáticas permiten crear modelos teóricos que sirven para explicar fenómenos de la vida real, por lo que existen una gran cantidad de problemas en diversas áreas que se resuelven utilizando el concepto de derivada, de los cuales te mostramos algunos ejemplos en la siguiente tabla.

Área	Aplicación de la Derivada
Geometría	La derivada del **área de una figura** se relaciona con medidas de longitud. Por ejemplo, la derivada del área de un círculo respecto al radio permite obtener la longitud del radio.
Biología	Permite el estudio de **evolución de poblaciones** de bacterias, de otras especies animales, de plantas, etc., según el tipo de crecimiento que presentan, en donde, para obtener dicho crecimiento se necesitan las derivadas.
Medicina	La derivada proporciona conocer la **evolución de ciertas enfermedade**s al modelar el número de bacterias, virus, etc., y estudiar su ritmo de crecimiento/decrecimiento si se utilizan fármacos, comprobando así su efectividad.
Economía	La derivada permite realizar **cálculos marginales**, es decir, hallar la razón de cambio cuando se agrega una unidad adicional al total considerado, sea cual sea la cantidad económica que se esté estudiando (coste, ingreso, beneficio, producción).

En esta progresión abordaremos la modelación de problemas utilizando funciones logarítmicas, exponenciales y trigonométricas que sean derivables.

Los modelos matemáticos contribuyen a comprender mejor un problema, pues permiten simplificar y transcribir su complejidad mediante ecuaciones, expresiones matemáticas o diseños geométricos que facilitan su solución. A modo de sugerencia, para modelar un problema, puedes utilizar un procedimiento como el que se muestra a continuación:

1. **Identifica las variables.** ¿Qué representa cada variable (por ejemplo, tiempo, cantidad, posición)?
   - **Variable independiente (x).** Es aquella que no depende de otra para su valor. En no pocas ocasiones está asociada al tiempo. En un experimento o modelo, esta es la variable que el investigador o el contexto controla o manipula.
   - **Variable dependiente (y).** Es aquella cuyo valor depende de la variable independiente.

2. **Identifica el modelo de función que más se adapte a la problemática.**
   - Cuando se trata de problemas relacionados con poblaciones crecientes utiliza **modelos exponenciales.**
   - Para eventos que inicialmente crecen rápidamente y después de un tiempo presenta un crecimiento desacelerado, puedes utilizar un **modelo logarítmico.**
   - Cuando el fenómeno involucra oscilaciones, ondas o repeticiones cíclicas el **modelo debe ser trigonométrico.**

3. **Resuelve y comprueba la solución.**

   Algo que debes considerar es que, si se trata de analizar cambios que conlleven obtener un máximo o un mínimo, es decir valores extremos en el comportamiento del fenómeno, se debe derivar la función que modele el problema.

Para conocer más sobre la modelación matemática, revisa el siguiente QR 14.2

QR 14.2. Modelado de funciones, Todo Un Informático. *Fuente*: Parzibyte, 2025.

Un ejemplo que ilustra todo lo anterior es el cálculo de velocidades y el de aceleraciones. Se sabe que el cambio de posición con respecto al tiempo representa la magnitud denominada velocidad, donde la velocidad representa la derivada (razón de cambio instantánea) de la posición s con respecto al tiempo t, es decir $v(t) = \frac{ds}{dt}$.

Así mismo, la aceleración se define como la variación instantánea de la velocidad con respecto al tiempo; la aceleración es la **segunda derivada** de la posición con respecto al tiempo, o bien es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, es decir $a(t) = \frac{dv}{dt}$.

Ejemplo formativo 14.1

1. En un experimento, la posición de una partícula a gran velocidad que se desplaza por una recta horizontal se puede modelar por medio de la ecuación:

$$s(t) = t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 10t + 3$$

Determina:

a) La posición

b) La velocidad

c) La aceleración de dicha partícula cuando han transcurrido $t = 4$ segundos.

Resolución

a) **La posición**. La función que determina la posición de la partícula en cualquier instante t es: $s(t) = t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 10t + 3$ (s en metros y t en segundos); sustituyendo $t = 4$, se tienen:

$$s(4) = (4)^4 - 6(4)^3 + 12(4)^2 - 10(4) + 3 = 27$$

A los cuatro segundos, la posición de la partícula es igual a 27 m.

b) **La velocidad**. Derivamos la función $s(t) = t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 10t + 3$, resultando:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 10t + 3)$$
$$v(t) = 4t^3 - 18t^2 + 24t - 10$$

Para $t = 4$, se tiene:

$$v(4) = 4(4)^3 - 18(4)^2 + 24(4) - 10 = 54$$

A los cuatro segundos, la velocidad de la partícula es igual 54 m/s.

c) **La aceleración**. Derivando la función velocidad $V(t) = 4t^3 - 18t^2 + 24t - 10$, resulta:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 12t^2 - 36t + 24$$

Para $t = 4$, se tiene:

$$a(4) = 12(4)^2 - 36(4) + 24 = 72$$

A los 4 segundo, la aceleración de la partícula es igual a 72 $\frac{m}{s^2}$.

Actividad formativa 14.1

1. Si $s(t)$ es una función posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal, encuentra la posición, velocidad y aceleración de la partícula en los instantes indicados.
   a) $s(t) = 5t^2 - 3t + 2$; $t = 1$, $t = 2$ segundos.
   b) $s(t) = \ln(3t + 4)$; $t = 2$ segundos.

Ejemplo formativo 14.2

1. Durante un estudio, el crecimiento de una población de cierto tipo de insectos en una región del Amazonas se pudo modelar mediante la siguiente función:
$$P(t) = 22 \ln(t + 6),$$
donde t representa el tiempo en días. Determina la tasa de crecimiento de la población de insectos al cabo de tres días.

Resolución

La tasa de crecimiento es la variación instantánea del número de insectos respecto al tiempo:
$$\text{tasa de crecimiento: } \frac{dP}{dt} = P'(t)$$
Por lo tanto, derivando la función $P(t) = 22 \ln(t + 6)$
$$P'(t) = \frac{22}{t+6}$$
Una vez obtenida la función derivada, encontramos el valor de la tasa de crecimiento al cabo de tres días:
$$P'(3) = \frac{22}{3+6} = \frac{22}{9} \approx 2.44$$
Lo que significa que transcurridos tres días la población de insectos está creciendo a una tasa de dos insectos por día.

Actividad formativa 14.2

1. El crecimiento de una inversión a lo largo del tiempo se puede modelar a partir de la siguiente función:
$$P(t) = \ln(t^2 + 1)$$
Donde el tiempo t está medido en años. Determina la tasa de crecimiento de la inversión después de haber transcurrido 5 años.

Ejemplo formativo 14.3

1. La población de una especie crece según la siguiente función:
$$P(t) = a + \frac{t}{e^{\frac{t}{2}}}, t \geq 0$$
donde $P(t)$ es el número de individuos de la población (medida en miles) y t el tiempo (medido en meses) y a es una constante positiva.
   a) Calcula a sabiendo que inicialmente había 3,000 individuos.
   b) ¿En qué momento alcanza la población un máximo?
   c) De existir un máximo, ¿cuánto es su valor?

Resolución

a) Si sabemos que inicialmente había 3,000 individuos, como la población se mide en miles, $P(0) = 3$, se tiene:

$$P(0) = 3 \Rightarrow a + \frac{0}{e^{\frac{0}{2}}} = 3 \Rightarrow a = 3.$$

b) ¿En qué momento alcanza la población un máximo?

Dada la función $P(t) = 3 + \frac{t}{e^{\frac{t}{2}}}$ en el intervalo $[0, +\infty)$, veamos si P tiene algún máximo.

Reescribiendo la función: $P(t) = 3 + \frac{t}{e^{\frac{t}{2}}} = 3 + te^{\frac{-t}{2}}$, encontramos la derivada:

$$P'(t) = \left(1 - \frac{t}{2}\right)e^{\frac{-t}{2}}$$

Para obtener los valores críticos se iguala la derivada a cero.

Al resolver la ecuación $\left(1 - \frac{t}{2}\right)e^{\frac{-t}{2}} = 0$, se obtiene que el único valor crítico es $t = 2$.

Por lo tanto, tenemos los siguientes intervalos de prueba: $[0, 2)$ y $(2, +\infty)$.

- Tomando $t = 1$, $P'(t) > 0$ en $[0, 2)$, por lo tanto, P es creciente en $[0, 2)$.
- Para $t = 4$, $P'(t) < 0$ en $(2, +\infty)$, por lo tanto, P es decreciente en $(2, +\infty)$.

Esto quiere decir que P tiene un máximo en $t = 2$, esto es, a los dos meses, el cual también será el máximo absoluto en $[0, +\infty)$.

c) De existir un máximo, ¿cuánto es su valor?

El máximo absoluto de P en $[0, +\infty)$ se alcanza en $t = 2$, por lo tanto:

$$P(2) = 3 + \frac{2}{e^{\frac{2}{2}}}$$

$$P(2) \approx 3.7366$$

Lo anterior significa que el valor máximo de la población se alcanza a los dos meses y es de 3,736 individuos.

Actividad formativa 14.3

1. Una colonia de mosquitos tiene una población inicial de 1,000 individuos. Después de t días, la población viene dada por $A(t) = 1000e^{0.3t}$.

   Encuentra la razón entre la tasa de cambio de la población, $A'(t)$, y la población $A(t)$.

Ejemplo formativo 14.4

1. Alejandra colocó un cuerpo metálico en el extremo de un resorte vertical y lo desplazó hacia abajo 35 cm, en relación con su posición de reposo, con la intención de estirar el resorte. Al soltarlo, observa que se realiza un movimiento de tipo periódico y repetitivo.

   A este tipo de movimiento en física se le denomina movimiento armónico simple; se presenta en sistemas físicos como resortes, péndulos y circuitos eléctricos, y su representación gráfica se muestra en la Figura 14.1.

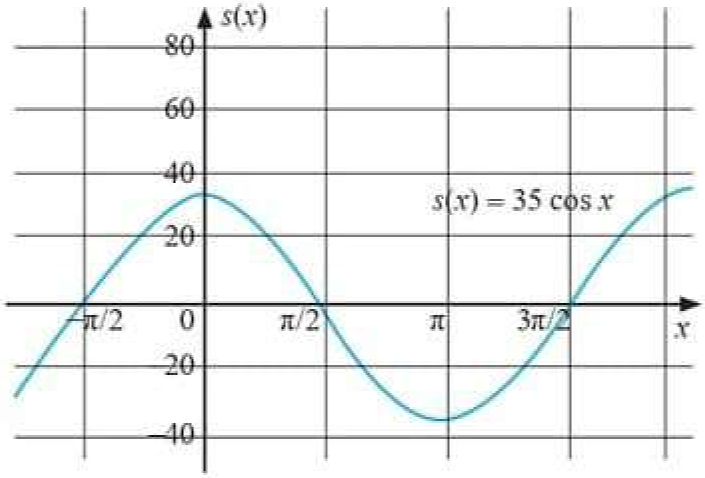


Figura 14.1. Movimiento armónico simple.
Fuente: Elaboración propia en GeoGebra (2025).

   Alejandra determinó que la posición en el instante x puede ser modelada mediante la función $s(x) = 35 \cos x$, donde s se mide en centímetros y x en segundos. Si se considera que la dirección hacia abajo es positiva, ¿cuál es la velocidad y la aceleración en el instante $x = \frac{\pi}{3}$?

   Resolución

   Como la velocidad representa la derivada de la función $s(x) = 35 \cos x$, entonces:

$$v(x) = s'(x) = -35 \text{ sen } x$$

   Calcula la velocidad para $x = \frac{\pi}{3}$, donde $v(x) = s'(x)$

$$v\left(\frac{\pi}{3}\right) = -35 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx -30.31$$

   La velocidad en el instante $x = \frac{\pi}{3}$ es aproximadamente de –30.31 cm/s, el valor negativo de la velocidad físicamente significa que el resorte en ese instante se mueve hacia arriba (se encoge), ya que la dirección hacia abajo se consideró positiva.

   Para determinar la aceleración, calcula la segunda derivada:

   $s'(x) = -35 \text{ sen } x$

   $s''(x) = a(x) = -35 \cos x$

   $a\left(\frac{\pi}{3}\right) = -35 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -17.5$

   Esto quiere decir que hay una desaceleración de 17.5 cm/s², es decir que en cada segundo la velocidad disminuye 17.5 cm/s.

Actividad formativa 14.4

1. Una banda elástica cuelga de un gancho, con una masa sujeta en su extremo inferior; cuando se tira de la masa hacia abajo y, luego se deja en libertad, vibra verticalmente en un movimiento armónico simple. El movimiento se puede modelar mediante la función $s(x) = x + \cos x$, donde s se mide en centímetros y x en segundos. Si se toma la dirección positiva la correspondiente hacia abajo, encuentra la velocidad y la aceleración en el instante $x = \frac{2\pi}{3}$.

2. Supongamos que estamos analizando el costo marginal de producción de una empresa. El costo C en función de la cantidad producida q está dada por

$$C(q) = 5q + \tan\left(\frac{q}{10}\right).$$

Determina el costo marginal para las cantidades producidas $q = 10$ y $q = 20$.

EVALUACIÓN FORMATIVA 14.1

1. En un cultivo de laboratorio, el número de bacterias (medido en millones) durante las primeras 100 horas viene dado por

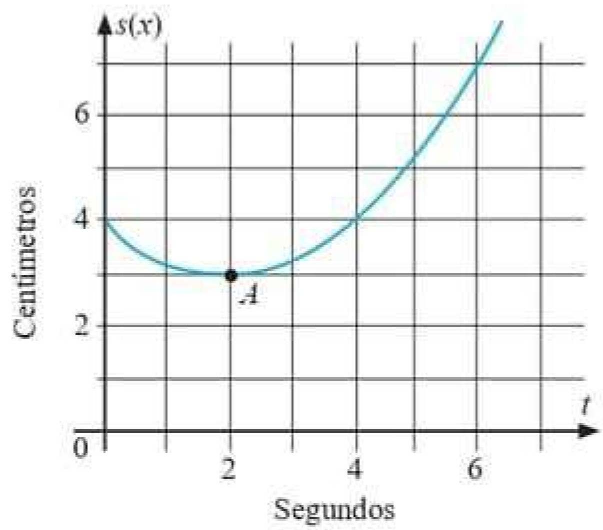
$$N(t) = 25 + te^{-\frac{t}{10}},\ t \in [0, 100].$$

Determina:

a) Los periodos de crecimiento y decrecimiento de la población.

b) Los momentos en que esta alcanza su máximo y su mínimo absolutos.

2. Supongamos que tenemos una partícula cuyo desplazamiento se muestra en la siguiente gráfica:



a) Obtén una función que modele el desplazamiento de la partícula.

b) A continuación, determina la velocidad y aceleración, con que se mueve la partícula.

c) Determina la posición, velocidad y aceleración a los tres segundos de estarse moviendo. Interpreta los resultados obtenidos.

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ________________________________ Plantel: ________________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 14. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Sinteticé los pasos sugeridos para modelar y resolver problemas donde se utilizan diferentes tipos de funciones derivables. (M4-C2)			
Determiné funciones matemáticas como modelos para describir y resolver problemas, aplicando los conocimientos sobre derivadas. (M2-C3)			
Sistematicé el procedimiento estudiado para modelar diferentes situaciones y resolver problemas, utilizando funciones y sus derivadas. (M3-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

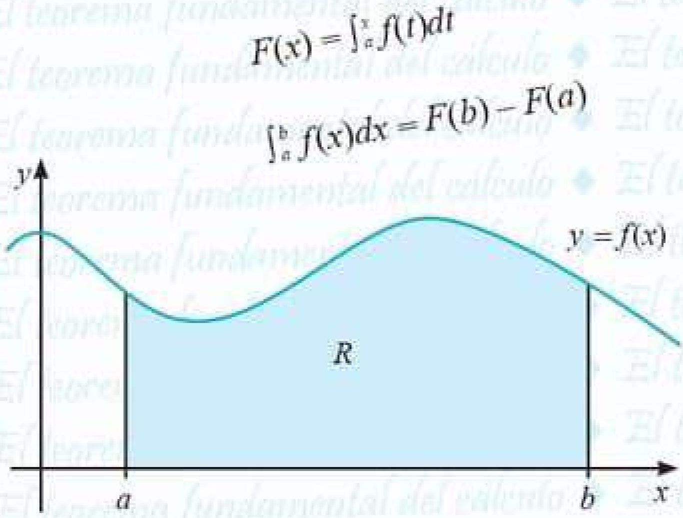
Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 14 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Sintetizó los pasos sugeridos para modelar y resolver problemas donde se utilizan diferentes tipos de funciones derivables. (M4-C2)			
Determinó funciones matemáticas como modelos para describir y resolver problemas aplicando los conocimientos sobre derivadas. (M2-C3)			
Sistematizó el procedimiento estudiado para modelar diferentes situaciones y resolver problemas, utilizando funciones y sus derivadas. (M3-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

El teorema fundamental del cálculo



Progresión de aprendizaje 15

Considera y revisa algunas ideas subyacentes al teorema fundamental del cálculo.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 15.1

1. La derivada de la función $f(x) = 5x^3$ es:
   a) $f'(x) = 15x^2$ b) $f'(x) = 8x^2$ c) $f'(x) = 15x$

2. ¿Cuál es la función cuya derivada es $f'(x) = 15x^2$?
   a) $f(x) = 5x^3 + x$ b) $f(x) = 5x^3 + x^2$ c) $f(x) = 5x^3$

3. Las funciones $f(x) = 6x^3 + 2x^2 - x + 3$ y $g(x) = 6x^3 + 2x^2 - x - 5$:
   a) Tienen derivadas diferentes
   b) Tienen derivadas iguales
   c) No son derivables

4. Si $f'(x) = \sqrt{2}$, entonces
   a) $f(x) = 2$ b) $f(x) = \sqrt{2}\,x$ c) $f(x) = x + \sqrt{2}$

Un auto se mueve a lo largo de una carretera y su velocidad en función del tiempo está dada por la función $v(t) = 3t^2$, donde v es la velocidad en metros por segundo y t es el tiempo en segundos. Se quiere determinar la posición del coche en cualquier instante t.

Ya sabes que la velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo, pero ¿cómo encontrar una expresión que te permita encontrar la posición del coche en cualquier instante t o en uno específico conociendo la velocidad?

En una modelación matemática de este problema, dado que la velocidad es una función (la derivada de la posición respecto al tiempo), se trata, entonces, de encontrar una función que exprese la posición respecto al tiempo, de manera que, al derivar se obtiene la velocidad con que se desplaza el auto.

En las progresiones anteriores, a partir de una función has resuelto obtener su derivada; el problema se invierte, es decir, dada una función f, encontrar, si existe, otra función F tal que $F' = f$. A esta función F se le denomina **antiderivada o primitiva** de f y nos permite recuperar la función original a partir de su derivada f'.

Definición de antiderivada

Una función $F(x)$ es una primitiva o antiderivada de otra función $f(x)$, sobre un intervalo I, si se cumple $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Ejemplo formativo 15.1

1. Si $f(x) = 3$ para todo $x \in (-\infty, +\infty)$, entonces $F(x) = 3x$ es una primitiva de $f(x)$, pues $F'(x) = 3$ para todo $x \in (-\infty, +\infty)$.
2. Si $f(x) = e^x$, entonces $F(x) = e^x$ es una antiderivada de f pues $F'(x) = e^x = f(x)$ para todo $x \in (-\infty, +\infty)$.
3. Si $f(x) = 2x$ es la derivada de una función F, las siguientes funciones son antiderivadas de f.

$$F(x) = x^2, \text{ pues } F'(x) = 2x$$

$$F(x) = x^2 + 2, \text{ pues } F'(x) = 2x$$

$$F(x) = x^2 - 5, \text{ pues } F'(x) = 2x$$

De igual forma:

Para las funciones:	Son antiderivadas:
a) $f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + 10$
	$F(x) = e^x - 10$
b) $f(x) = 100x^3$	$F(x) = 25x^4 + 20$
	$F(x) = 25x^4 - 20$

Como habrás podido apreciar en los ejemplos anteriores, la antiderivada de una función no es una única función, es un conjunto o familia de funciones, ya que, en general, si $F(x)$ es una primitiva o antiderivada de f y C es una constante arbitraria, entonces $F(x) + C$, también es una antiderivada de f, pues

$$\frac{d(F(x) + C)}{dx} = F'(x) + (C)' = f(x) + 0 = f(x)$$

Actividad formativa 15.1

1. Determina una antiderivada de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \frac{1}{2}$ b) $g(x) = 100x^4$ c) $h(x) = \cos x$

2. Completa la siguiente tabla.

Función	Una antiderivada
$f(x) = 20$	$F(x) =$
$f(x) =$	$F(x) = 20x^5 + 2x$
$f(x) = 20x^3 - 2$	$F(x) =$
$f(x) =$	$F(x) = 3x^4 - 4x^2 + 5x$
$f(x) = 20e^x + 5$	$F(x) =$

Para obtener una antiderivada $F(x)$, hemos utilizado, de cierta manera en sentido inverso, las fórmulas básicas de derivación ya estudiadas y a este proceso se le llama antiderivación o integración. Es por ello, que al conjunto de todas las primitivas o antiderivadas de la función f se le llama integral indefinida de f.

La integral indefinida de una función es una función que representa todas las antiderivadas posibles de la función original y se denota con un símbolo particular, $\int$, denominado integral, seguido de la función y una expresión que incluye la variable de integración.

Definición de integral indefinida

Dada una función $f(x)$, al conjunto de todas sus antiderivadas $F(x) + C$ se le denomina integral indefinida de f con respecto a la variable x y se representa por

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

¿Sabías qué?

El símbolo de integral, $\int$, tiene una historia interesante. Fue introducido por el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz en el siglo XVII, reconocido como uno de los padres del cálculo, junto con Isaac Newton.

El símbolo es una versión estilizada de la letra "S" alargada, que proviene de la palabra latina "summa", que significa "suma". Leibniz eligió este símbolo para representar la operación de integración porque la integral de una función puede considerarse como la suma de infinitos rectángulos infinitesimales bajo la curva de la función.

El término de indefinida se asocia a la constante C que es arbitraria. Si se busca una antiderivada o integral en particular hay que determinar el valor correspondiente de C. Para ello, se requieren las coordenadas de un punto que pertenezca a la antiderivada específica.

Ejemplo formativo 15.2

1. Determina la integral de la función $f(x) = 15x^2$ que contiene al punto $P(1, 10)$.

   Resolución

   De acuerdo con la definición de integral $\int 15x^2\, dx = 5x^3 + C$

   Es decir, has obtenido toda la familia de primitivas, $F(x) = 5x^3 + C$, ya que

   $$\frac{d(5x^3 + C)}{dx} = 15x^2 + (C)' = 15x^2$$

   Si buscas, de ellas, la que contiene al punto $P(1, 10)$, como eso significa que cuando $x = 1$, $F(1) = 10$, se sustituyen esas coordenadas en la expresión de $F(x) = 5x^3 + C$

   $$10 = 5(1)^3 + C \;\Rightarrow\; 10 = 5(1) + C \;\Rightarrow\; C = 5$$

   La primitiva o integral buscada es $F(x) = 5x^3 + 5$.

Actividad formativa 15.2

1. Determina la integral de la función $f(x) = 2x + 1$ que pasa por el punto $P(1, 4)$.
2. En un vivero se cultivan plantas y se sigue su crecimiento. La velocidad de crecimiento está dada por $v(t) = 1.7t + 5$, donde t es el tiempo en años. Al plantarse en el semillero miden inicialmente 15 cm. Determina qué altura alcanzarán a los t años.

Integral y área bajo la curva

En Pensamiento Matemático I, el área bajo la curva de la distribución normal estándar significa la probabilidad de que el valor de una variable aleatoria caiga dentro de un rango específico.

Vamos a analizar qué significado tiene la integral con el área bajo la curva que determina la gráfica de una función y lo haremos a través de un ejemplo particular. Ya has visto que una antiderivada o integral de la función constante $f(x) = k$ es la función $F(x) = kx$. Supón que tienes una función constante, por ejemplo $f(x) = 3$ y quieres determinar el área determinada por esta función y el eje x entre el valor $x = 0$ y un valor x, como se muestra en la Figura 15.1.

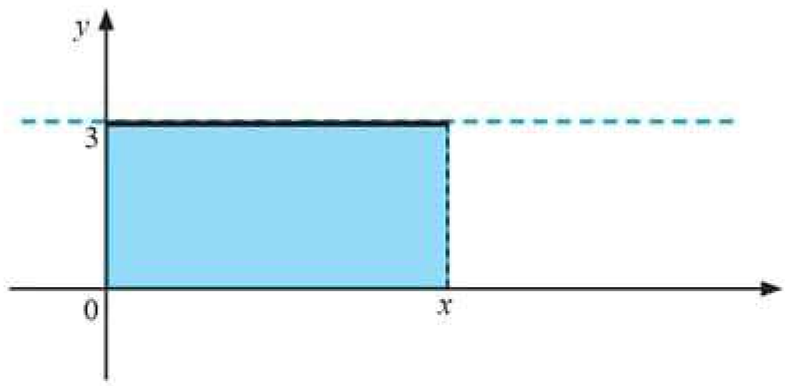


Figura 15.1. Área bajo la curva de $f(x) = 3$.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2025).

El área que determina esta función en los límites previstos es el área de un rectángulo, dada por $A(x) = b \cdot h = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = (x - 0)(3 - 0) = 3x$, lo que coincide con la expresión de la integral de la función $f(x) = 3$.

Así, en este ejemplo, $\int 3\, dx = 3x$ es una antiderivada de $f(x) = 3$ y representa el área bajo la curva que describe la función constante igual a 3 entre los límites 0 y x.

Este resultado es general, aunque se ha obtenido a partir de un ejemplo; se obtiene en cursos de cálculo integral y expresa que, cuando consideramos una función continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ la integral o antiderivada de dicha función respecto a dicho intervalo cerrado, representa el área bajo la curva que delimita dicha función, el eje x y los límites que determinan los valores a y b, como se muestra en la Figura 15.2. En este caso se denomina integral definida y se denota $\int_a^b f(x)dx$.

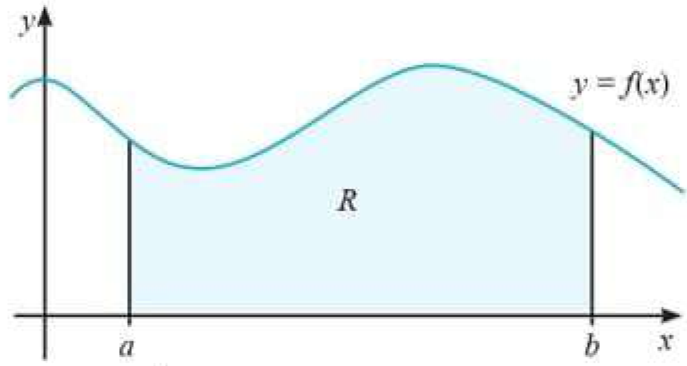


Figura 15.2. Área bajo la curva de $f(x)$.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2025).

El extremo izquierdo del intervalo se denomina límite inferior de la integral y el extremo derecho límite superior.

Si quieres profundizar sobre el significado geométrico de la integral definida observa el video que aparece en QR 15.1.

QR 15.1. ¿Qué es la integral? Significado de la integral definida. BlueDot. *Fuente*: Parzibyte, 2025.

Si bien la integral definida proporciona como significado geométrico el área bajo la curva que representa a una función entre dos valores determinados, analíticamente expresa la relación entre dos conceptos principales del cálculo infinitesimal, la derivada y la integral.

Teorema fundamental del Cálculo

Considera la integral definida con límite superior variable, es decir $\int_a^x f(t)dt$, y sea $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. El teorema fundamental del cálculo, que establece la relación entre los conceptos de derivada e integral, se puede subdividir en dos partes principales.

Primer teorema fundamental del cálculo

Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ y $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ para $x \in [a, b]$, entonces $F'(x) = f(x)$.

Esta primera parte o primer teorema expresa que toda función continua en un intervalo admite una antiderivada o primitiva y que la derivada de la integral de la función es la función misma.

Segundo teorema fundamental del cálculo

Si $f(x)$ es una función continua sobre un intervalo $[a, b]$ y F una primitiva de f sobre $[a, b]$, se cumple $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

El segundo teorema expresa cómo calcular una integral definida usando una antiderivada cualquiera de la función $f(x)$.

Para evaluar la integral definida, se utiliza la siguiente notación

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$$

donde $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$. La notación $F(x)\big|_a^b$ significa que F debe evaluarse en b y luego en a, siempre que $b > a$.

Ejemplo formativo 15.3

1. A partir de la expresión $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, calcula las siguientes integrales definidas.

   a) $\int_{-2}^{2} 2dx$

   b) $\int_{-2}^{2} (x^3 + 2)\, dx$

   c) $\int_1^3 (-x^2 + 4)\, dx$

   Resolución

   Aplica el teorema fundamental del cálculo $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, con $a = -2$ y $b = 2$.

   a) $\int_{-2}^{2} 2dx = 2x\big|_{-2}^{2} = 2(2) - 2(-2) = 8$

   b) $\int_{-2}^{2}(x^3 + 2)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} + 2x\right]_{-2}^{2} = \left[\frac{(2)^4}{4} + 2(2)\right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} + 2(-2)\right]$

   $$= \left[\frac{16}{4} + 4\right] - \left[\frac{16}{4} - 4\right] = 8$$

   c) $\int_1^3 (-x^2 + 4)\, dx$

   $$\int_1^3(-x^2 + 4)\, dx = \left[\frac{-x^3}{3} + 4x\right]_1^3 = \left[\frac{-(3)^3}{3} + 4(3)\right] - \left[\frac{-(1)^3}{3} + 4(1)\right]$$

   $$= \left[\frac{-27}{3} + 12\right] - \left[\frac{-1}{3} + 4\right] = \left[\frac{9}{3}\right] - \left[\frac{11}{3}\right] = -\frac{2}{3}$$

Actividad formativa 15.3

1. Calcula las siguientes integrales.

   a) $\int_2^5(-t^2 + 5)\, dt$

   b) $\int_{-1}^{3} (t^3 + 4t - 1)\, dt$

Ya conoces que la velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo, luego la posición es antiderivada de la velocidad y a su vez, la velocidad es antiderivada de la aceleración. En relación con estas magnitudes el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que, si tienes:

- Una función velocidad $v(t)$ y calculas su integral desde t_1 hasta t_2, obtienes la distancia recorrida entre esos dos valores de tiempo.
- Una función que representa la distancia recorrida en función del tiempo, la derivada de esta función te da la velocidad instantánea.

Ejemplo formativo 15.4

1. Dos nadadores, Ana y Bruno, compiten en una carrera de 30 segundos. La posición de Ana en función del tiempo t (en segundos) está dada por la función $s_A(t) = 0.1t^2 + 0.5t$, donde $s_A(t)$ está en metros. La velocidad de Bruno en función del tiempo t está dada por $v_B(t) = 0.2t + 0.3$, donde $v_B(t)$ está en metros por segundo.

   a) Determina quién ha avanzado más a los 30 segundos.

   b) Calcula la velocidad de ambos a los 30 segundos.

Resolución

a) Calcula la distancia recorrida por cada uno.

- Distancia recorrida por Ana:

  La posición de Ana después de 30 segundos se obtiene evaluando su función de posición en $t = 30$:

$$s_A(30) = 0.1(30)^2 + 0.5(30) = 90 + 15 = 105$$

- Distancia recorrida por Bruno:

  Para encontrar la distancia recorrida por Bruno, necesitas integrar su función velocidad desde $t = 0$ hasta $t = 30$:

$$\int_0^{30} (0.2t + 0.3)dt = \left[0.2\frac{t^2}{2} + 0.3t\right]_0^{30} = \left[0.2\frac{(30)^2}{2} + 0.3(30)\right] - 0 = 99$$

  Ana ha recorrido 105 metros en 30 segundos, mientras que Bruno ha recorrido 99 metros en el mismo tiempo. Por lo tanto, Ana ha recorrido más distancia que Bruno al cabo de 30 segundos.

b) Determina la velocidad de cada uno a los 30 segundos:

- Velocidad de Ana:

  La posición de Ana está dada por $s_A(t) = 0.1t^2 + 0.5t$.

  Para obtener la velocidad deriva esta función con respecto al tiempo t:

$$v(t) = s_A'(t) = 0.2t + 0.5$$

  Evalúa esta función en $t = 30$: $v(30) = 0.2(30) + 0.5 = 6.5$

- Velocidad de Bruno:

  La velocidad de Bruno está dada directamente por la función $v_B(t) = 0.2t + 0.3$, por lo que evalúa la función para $t = 30$

$$v_B(30) = 0.2(30) + 0.3 = 6.3$$

A los 30 segundos, Ana iba a una velocidad de 6.5 m/s y Bruno a 6.3 m/s.

Actividad formativa 15.4

1. Ana y Bruno se preparan para una nueva competencia de natación. En un entrenamiento, la aceleración de Ana en función del tiempo t (en segundos) está dada por la función $a_A(t) = 0.005t + 0.02$, donde $a_A(t)$ está en metros por segundo al cuadrado. La aceleración de Bruno en función del tiempo t está dada por la función $a_B(t) = 0.004t + 0.025$, donde $a_B(t)$ está en metros por segundo al cuadrado.

a) ¿Qué velocidad llevaba cada uno a los 20 segundos de estar nadando?

b) ¿Qué distancia había recorrido cada uno entre los 10 y 20 segundos?

EVALUACIÓN FORMATIVA 15.1

1. Responde si las afirmaciones siguientes son verdaderas (V) o falsas (F).

Proposición	(V) / (F)
a) Una función no puede tener más de una primitiva o antiderivada.	
b) La derivada de una función *f* permite calcular el área bajo la curva que representa la función.	
c) Para calcular la integral de una función entre dos valores se evalúa una antiderivada de dicha función en esos dos valores.	
d) El teorema fundamental del cálculo relaciona la derivada de una función con su primitiva.	
e) La derivada de la integral de una función es la función misma.	

2. Representa con un graficador la función $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5$, para $2 \leq x \leq 10$.

   a) ¿Cómo calculas el área entre la curva de esa función y el eje x?

   b) Calcula el área entre la curva de esa función y el eje x.

3. El jardinero de la preparatoria CU Mochis necesita césped para embellecer un espacio de la unidad académica y para ello utilizó una carretilla para transportar materiales cuya velocidad quedó determinada por la función $v(t) = -t^2 + 4t$, donde la velocidad se mide en kilómetros por hora.

   a) Determina una antiderivada $V(t)$ para la función velocidad $v(t) = -t^2 + 4t$.

   b) Calcula la distancia recorrida en las primeras dos horas.

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ______________________ Plantel: ______________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 15. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Analicé cómo la integral caracteriza geométricamente el área bajo una curva y cómo se utiliza en la solución de problemas aplicando el teorema fundamental del cálculo. (M4-C2)			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 15 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Analizó cómo la integral caracteriza geométricamente el área bajo una curva y cómo se utiliza en la solución de problemas aplicando el teorema fundamental del cálculo. (M4-C2)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Bibliografía de consulta para el estudiante y el profesor

Bibliografía consultada

Colavita, E, (2024). *Pensamiento matemático III*. Macmillan Education.

García, N. A., Cabrera, M. Á. (2024) *Pensamiento Matemático 3*. Conecta Editores.

Haro, A., Esparza, D., Amaya, J. y Lechuga, S. (2024). *Pensamiento Matemático 3*. Patria.

Otero, I., Kurl, P., Cano, M., Rivera, J. y González, R. (2024). *Pensamiento Matemático 3*. Editorial Ediciones Sm.

Vizcarra, F., Forneiro, R., Sosa, C. E. y Flórez, A. (2020). *Cálculo I. Cálculo diferencial para bachillerato*. Servicios Once Ríos Editores.

SEP (2023a). *Acuerdo número 09/08/23 por el que se establece y regula el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior*. Diario Oficial de la Federación.

SEP (2023b). *Orientaciones Pedagógicas del recurso sociocognitivo pensamiento matemático*. SEMS.

SEP (2023c). *Progresiones de aprendizaje del recurso sociocognitivo pensamiento matemático*. SEMS.

SEP (2023d). *Programa de estudios del Recurso Sociocognitivo Pensamiento Matemático I*. Secretaría de Educación Pública.

Referencia a las fuentes de consulta de imágenes

Figura 1.1. Precursores del Cálculo Infinitesimal. *Fuente*: Elaborada en OpenAI (2025).

Figura 1.2. Carrera de autos. *Fuente*: Elaborada en OpenAI (2025).

Figura 1.3. Gráfica de una función. *Fuente*: Elaboración propia, (GeoGebra, 2025).

Figura 2.1. Issac Newton (1643-1727). *Fuente*: Generada por OpenAI, 2025.

Figura 2.2. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). *Fuente*: Generada por OpenAI, 2025.

Figura 2.3. Pendiente de la curva posición – tiempo (Física). *Fuente*: Generada por OpenAI, 2025.

Figura 2.4. Tasa de cambio (Economía). *Fuente*: Generada por OpenAI, 2025.

Figura 2.5. Inclinación o dirección de una superficie (Ingeniería). *Fuente*: Generada por OpenAI, 2025.

Figura 2.6. Atleta corriendo en una pista circular. *Fuente*: Generada por OpenAI, 2025.

Figura 2.7. Carretera sinuosa. *Fuente*: Generada por OpenAI, 2025.

Figura 2.8. Sombra de un árbol. *Fuente*: Generada por OpenAI, 2025.

Figura 2.9. Gráficas de las funciones: $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$; $y = 1$. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2025).

Figura 2.10. Función $f(x) = x^2$ y la recta secante que pasa por los puntos P y Q. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2025).

Figura 12.3. Gráficas de la función exponencial y la función logarítmica de base a. *Fuente*: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Figura 12.4. Graficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$. *Fuente*: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Figura 13.1. Gráfica de una función $f(x)$. *Fuente*: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Figura 13.2. Triángulo rectángulo ACB. *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2025).

Figura 13.3. Círculo unitario con el punto P en los cuatro cuadrantes. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2025).

Figura 13.4. Gráfica de la función $y = \text{sen } x$. *Fuente*: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Figura 13.5. Gráfica de la función $y = \cos x$. *Fuente*: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Figura 13.6. Desplazamiento horizontal de la función $y = A \text{ sen } (Bx + C)$. *Fuente*: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Figura 13.7. Desplazamiento horizontal de la función $y = A \cos (Bx + C)$. *Fuente*: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Figura 13.8. Gráfica de la función $y = \tan x$. *Fuente*: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Figura 14.1. Movimiento armónico simple. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2025).

Figura 15.1. Área bajo la curva de $f(x) = 3$. *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2025).

Figura 15.2. Área bajo la curva de $f(x)$. *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2025).

Referencia a las fuentes de consulta de códigos QR

QR 1.1. Significado del Cálculo Diferencial (Parzibyte, 2025).

QR 1.2. Desarrollo histórico del Cálculo Infinitesimal. https://euler.us.es/~libros/calculo.html (Parzibyte, 2025).

QR 2.1. Applet de GeoGebra (Parzibyte, 2025).

QR 2.2. Applet de GeoGebra (Parzibyte, 2025).

Código QR 5.1. Paradoja de Zenon. Video de TEDEd Sé Curioso. https://youtu.be/SolpJZ859kQ (Parzibyte, 2025).

Código QR 10.1. Video 2 del profe Alex, optimización. https://youtu.be/CHqUqY8zU5k. (Parzibyte, 2025).

Código QR 10.2. Video 4 del profe Alex, optimización. https://youtu.be/IerCuP_rl9I. (Parzibyte, 2025).

Código QR 10.3. Video 4 del profe Alex, optimización. https://youtu.be/IerCuP_rl9I. (Parzibyte, 2025).

QR 14.1. El mundo de la matemática, fundación POLAR. https://www.mat.uson.mx/~jldiaz/Documents/Funcion/modelos-fasciculo17.pdf . (Parzibyte, 2025)..

QR 14.2. Modelado de funciones, Todo Un Informático. https://youtu.be/PlNRe60iACg. (Parzibyte, 2025).

QR 15.1. ¿Qué es la integral? Significado de la integral definida. BlueDot. https://youtu.be/At0uTXvooSE. (Parzibyte, 2025).

Pensamiento matemático III
Se terminó de imprimir en julio de 2025 en los talleres gráficos
de Servicios Editoriales Once Ríos, S.A. de C.V.,
Luis González Obregón S/N, Nuevo Bachigualato, C.P. 80135,
Tel. 667 712 2950, Culiacán, Sin., México

Esta obra consta de 23,000 ejemplares.